UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Geometria I
A. Algebra lineare

Prof.ssa Silvia Pianta

Anno accademico 2021/2022

Indice

Errata corrige della dispensa di **Algebra Lineare**

- Pag. 20, Esercizio 1.5.4: sostituire $\alpha(-4,-6)+\beta(2,3)=(0,0)$ con $\alpha(2,3)+\beta(-4,-6)=(0,0)$
- Pag. 26, Esempio 1.6.4: sostituire
$$\mathbb{K}_n[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \;:\; a_i \in \mathbb{K},\ \forall i = 1,\dots,n \right\}$$
con
$$\mathbb{K}_n[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \;:\; a_h \in \mathbb{K},\ \forall h = 0,\dots,n \right\}$$
e sostituire
$$\mathbb{K}[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \;:\; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{K},\ \forall i = 1,\dots,n \right\}$$
con
$$\mathbb{K}[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \;:\; n \in \mathbb{N},\ a_h \in \mathbb{K},\ \forall h = 0,\dots,n \right\}$$
- Pag. 27, Corollario 1.6.7: aggiungere "non banale" dopo "spazio vettoriale"
- Pag. 30, Definizione 1.6.14: sostituire "scalare" con "numero naturale"
- Pag. 39, Osservazione 1.7.17: sostituire $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ per ogni $i,j = 1,\dots,t$ con $V_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{t} V_j \right) = \{\mathbf{0}\}$ per ogni $i = 1,\dots,t$
- Pag. 42, Esercizio 6: sostituire
$$U_2 = \langle (1,3,2,2), (1,3,2,4), (2,6,2,5) \rangle$$
con
$$U_2 = \langle (1,3,2,2), (1,3,4,1), (2,6,2,5) \rangle$$
- Pag. 62, Esempio 2.5.5: i valori di y e t vanno cambiati di segno (aggiungere un segno meno davanti ai determinanti corrispondenti)
- Pag. 78, Esempio 3.13: sostituire (quinta riga)
$$(x_1 - y_1) + (x_2 + y_2) = T(x_1,y_1) + T(x_2 + y_2)$$
con
$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2).$$
- Pag. 82, Osservazione 3.1.15: nell'ultima riga, sostituire $\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}$ con $\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}$
- Pag. 88, Esercizio 3.2.4: sostituire $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Pag. 100, Proposizione 3.5.1: sostituire $S : V \to V''$ con $S : V' \to V''$
- Pag. 116, Definizione 4.1.5: sostituire "scalare" con "numero naturale"
- Pag. 123, Esercizio 2.: sostituire la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ con la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Capitolo 1

Spazi vettoriali

Nel corso del seguente Capitolo, $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ indicherà un generico campo, i cui elementi verranno detti *scalari*.

1 Definizione ed esempi

(1.1.1) Definizione *Sia V un insieme non vuoto, i cui elementi verranno detti* vettori*. Diciamo che V ha la struttura di* **spazio vettoriale su $\mathbb{K}$** *se valgono i seguenti assiomi:*

$(SV1)$ *esiste un'operazione binaria $\widehat{+}$ definita su V tale che $(V, \widehat{+})$ è un gruppo abeliano;*

$(SV2)$ *esiste un'applicazione (detta* **moltiplicazione per uno scalare** *o* **prodotto esterno***) definita da*

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (k, \boldsymbol{v}) & \longmapsto & k\boldsymbol{v}\,, \end{cases}$$

verificante le seguenti condizioni: per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$

$$(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} \widehat{+} b\boldsymbol{v}\,;$$

$$a(\boldsymbol{v} \widehat{+} \boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v} \widehat{+} a\boldsymbol{w}\,;$$

$$(ab)\boldsymbol{v} = a(b\boldsymbol{v})\,;$$

$$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\,.$$

Nel seguito, denoteremo con $V(\mathbb{K})$ un generico spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

(1.1.2) Esempio *Sia $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un campo. Allora $(\mathbb{K},+)$ è un gruppo abeliano. Se su $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ si definisce*

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{K}^2 : \quad (x_1,y_1)\widehat{+}(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

si può dedurre che $(\mathbb{K}^2,\widehat{+})$ è un gruppo abeliano.
Definiamo poi tra $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}^2$ la seguente operazione:

$$\begin{cases} \mathbb{K}\times\mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (k,(x,y)) & \longmapsto & (kx,ky)\,. \end{cases}$$

Allora tale operazione è un prodotto esterno, ovvero verifica le quattro proprietà della Definizione (1.1.1). *Pertanto $\mathbb{K}^2(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Lasciamo per esercizio la dimostrazione che $(\mathbb{K}^2,\widehat{+})$ è un gruppo abeliano. Siano $a,b\in\mathbb{K}$ e $(x,y)\in\mathbb{K}^2$. Allora

$$(a+b)(x,y) = ((a+b)x,(a+b)y) = (ax+bx, ay+by) =$$

$$= (ax,ay)\widehat{+}(bx,by) = a(x,y)\widehat{+}b(x,y)\,,$$

da cui segue la prima proprietà del prodotto esterno. Inoltre:

$$1(x,y) = (1x,1y) = (x,y)\,.$$

Le rimanenti proprietà di tale operazione possono essere verificate per esercizio. ■

(1.1.3) Osservazione *Siano $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$ e $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un campo. Sia*

$$\mathbb{K}^n := \{(x_1,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{K},\, i=1,\dots,n\}\,.$$

Definiamo

$$(x_1,\dots,x_n)\widehat{+}(y_1,\dots,y_n) := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\,.$$

Allora $(\mathbb{K}^n,\widehat{+})$ è un gruppo abeliano. Inoltre, ponendo

$$\begin{cases} \mathbb{K}\times\mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (k,(x_1,\dots,x_n)) & \longmapsto & (kx_1,\dots,kx_n)\,, \end{cases}$$

si ottiene un prodotto esterno. Pertanto, $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$ *è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(1.1.4) Esempio *Sia*

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \, : \, a_h \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N} \right\} ,$$

l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali e nell'indeterminata x. *Allora* $\mathbb{R}[x]$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *se definiamo la somma tra vettori come l'usuale somma tra polinomi ed un prodotto esterno dato da*

$$k \left(\sum_{h=0}^{n} a_h x^h \right) := \sum_{h=0}^{n} k a_h x^h \, .$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

2 Prime proprietà

(1.2.1) Proposizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale. Allora per ogni* $k, k_1, ..$ $.., k_n \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ *risulta*

$$k(\boldsymbol{v}_1 \widehat{+} \ldots \widehat{+} \boldsymbol{v}_n) = k\boldsymbol{v} \widehat{+} \ldots \widehat{+} k\boldsymbol{v}_n \, ,$$

e

$$(k_1 \ldots k_n)\boldsymbol{v} = k_1(k_2 \ldots (k_n, \boldsymbol{v}))\, .$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(1.2.2) Proposizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale,* $k \in \mathbb{K}$ *e* $\boldsymbol{v} \in V$. *Allora* $k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ *se, e solo se,* $k = 0$ *oppure* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Supponiamo che $k = 0$ oppure $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Sia dapprima $k = 0$. Allora per ogni $\mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $\boldsymbol{v} \in V$, calcolando in due modi diversi $(0+\mu)\boldsymbol{v}$, risulta

$$(0+\mu)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v}\widehat{+}\mu\boldsymbol{v}\,,$$

e

$$(0+\mu)\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}\,.$$

Allora, in $(V, \widehat{+})$ otteniamo:

$$0\boldsymbol{v}\widehat{+}\mu\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}\,,$$

da cui $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Sia ora $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Per ogni $k \in \mathbb{K}$ e per ogni $\boldsymbol{w} \in V$ risulta:

$$k(\mathbf{0}\widehat{+}\boldsymbol{w}) = k\mathbf{0}\widehat{+}k\boldsymbol{w}\,,$$

e

$$k(\mathbf{0}\widehat{+}\boldsymbol{w}) = k\boldsymbol{w}\,.$$

Pertanto, in $(V, \widehat{+})$, osserviamo che

$$k\mathbf{0}\widehat{+}k\boldsymbol{w} = k\boldsymbol{w}\,,$$

da cui $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Supponiamo, viceversa, che $k\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Se $k = 0$, abbiamo la tesi. Supponiamo allora che $k \neq 0$. Allore esiste $k^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Pertanto, ricordando la proprietà prima dimostrata, otteniamo:

$$k\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = (k^{-1}k)\boldsymbol{v} = k^{-1}(k\boldsymbol{v}) = k^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}\,.$$

■

(1.2.3) Proposizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $k \in \mathbb{K}$ e $\boldsymbol{v} \in V$. Allora risulta*

$$(-k)\boldsymbol{v} = \widehat{-}k\boldsymbol{v} = k(\widehat{-}\boldsymbol{v})\,.$$

Dimostrazione. Ricordando la proposizione precedente, abbiamo

$$(-k)\boldsymbol{v}\widehat{+}k\boldsymbol{v} = (-k+k)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\,,$$

da cui $(-k)\boldsymbol{v} = \widehat{-}k\boldsymbol{v}$. Inoltre, ricordando le proprietà del prodotto esterno, abbiamo:

$$k(\widehat{-}\boldsymbol{v})\widehat{+}k\boldsymbol{v} = k(\widehat{-}\boldsymbol{v}\widehat{+}\boldsymbol{v}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

da cui $k(\widehat{-}\boldsymbol{v}) = \widehat{-}(k\boldsymbol{v})$, da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si consideri $\mathbb{R}^2$ e si stabilisca se è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle seguenti operazioni: per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$

(1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$ e $k(x, y) = (kx, ky)$;

(2) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1 + y_2)$ e $k(x, y) = (kx, ky)$;

(3) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$ e $k(x, y) = \big(x^k, y^k\big)$.

2. Siano $\mathbb{K}$ un campo ed A un insieme non vuoto. Si consideri l'insieme

$$V = \{f : A \to \mathbb{K} :\ f \text{ è funzione}\}\ .$$

Definiamo su V le seguenti operazioni per ogni $f, g \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{K}$:

$$f\widehat{+}g : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x)\,, \end{cases}$$

e

$$k * f : \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & kf(x)\,. \end{cases}$$

Dimostrare che $(V, \widehat{+}, *)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

3 Sottospazi vettoriali

(1.3.1) Definizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $W \subseteq V$*, con* $W \neq \emptyset$*. Diciamo che* W *è un* **sottospazio vettoriale** *di* $V(\mathbb{K})$ *(e scriveremo* $W \leq V$*) se*

(a) *per ogni* $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ *si ha* $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$[1]*;*

(b) *per ogni* $\boldsymbol{w} \in W$ *e per ogni* $\alpha \in \mathbb{K}$ *si ha* $\alpha\boldsymbol{w} \in W$*.*

(1.3.2) Osservazione *La definizione precedente implica che* $W(\mathbb{K})$ *è esso stesso uno spazio vettoriale. Infatti* $(W, +)$ *è un gruppo abeliano poichè* W *è chiuso rispetto alla somma, la proprietà associativa viene ereditata da* $V(\mathbb{K})$*, l'elemento neutro di* W *coincide con* $\mathbf{0}$ *che appartiene a* W *poichè per ogni* $\boldsymbol{w} \in W$ *si ha* $0\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$*, l'elemento opposto di* $\boldsymbol{w} \in W$ *risulta essere* $-\boldsymbol{w} = -1\boldsymbol{w} \in W$*. Inoltre* W *è chiuso rispetto al prodotto esterno ereditato da* $V(\mathbb{K})$ *e le properietà di prodotto esterno sono anch'esse ereditate.*

É interessante considerare anche alcuni casi particolari: se $W = V$, parleremo di *sottospazio improprio*, mentre se $W = \{\mathbf{0}\}$, parleremo di *sottospazio banale*.

(1.3.3) Proposizione (Criterio di riconoscimento per i sottospazi) *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $W \subseteq V$ *con* $W \neq \emptyset$*. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) W *è un sottospazio vettoriale di* $V(\mathbb{K})$*;*

(b) *per ogni* $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ *e per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *risulta* $\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2 \in W$*.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$. Supponiamo che $W \leq V$. Siano $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dal fatto che W è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ risulta $\alpha\boldsymbol{w}_1 \in W$ e $\beta\boldsymbol{w}_2 \in W$. Pertanto, $\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2 \in W$.
$(b) \Longrightarrow (a)$. Scegliamo in particolare $\alpha = \beta = 1$. Allora $1\boldsymbol{w}_1 + 1\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$. Se ora $\beta = 0$, abbiamo $\alpha\boldsymbol{w}_1 + 0\boldsymbol{w}_2 = \alpha\boldsymbol{w}_1 \in W$. Da queste due proprietà e per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, segue la tesi. ∎

[1] D'ora in poi poniamo scriveremo $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ per indicare $\boldsymbol{w}_1 \widehat{+} \boldsymbol{w}_2$.

(1.3.4) Esercizio *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ *si consideri*

$$W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y = 2x\right\} \, .$$

Provare che W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. Osserviamo che $W \neq \emptyset$ poichè $(0,0) \in W$. Sia $\boldsymbol{w}_1 = (x, 2x) \in W$ e $\boldsymbol{w}_2 = (y, 2y) \in W$. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\alpha \boldsymbol{w}_1 + \beta \boldsymbol{w}_2 = \alpha(x,2x) + \beta(y,2y) = (\alpha x, 2\alpha x) + (\beta y, 2\beta y) =$$

$$= (\alpha x + \beta y, 2(\alpha x + \beta y)) = (z, 2z) \in W \, ,$$

pertanto W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. ♣

(1.3.5) Esercizio *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}[x]$ *si consideri*

$$W = \mathbb{R}_2[x] = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} \, .$$

Provare che W *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}[x]$.

Soluzione. Osserviamo che $W \neq \emptyset$ poichè il polinomio nullo (indicato con $0_{\mathbb{R}[x]}$) e i polinomi di grado zero appartengono a W. Siano ora

$$\boldsymbol{w}_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \, , \qquad \boldsymbol{w}_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

due vettori di W. Siano inoltre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Segue che

$$\alpha \boldsymbol{w}_1 + \beta \boldsymbol{w}_2 = \ldots = (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)x^2 \in W \, ,$$

pertanto risulta che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. ♣

Esercizi

1. Sia $V(\mathbb{K}) = \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Si dica se i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali:

$$W_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 = 1\right\} \, ,$$

$$W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} ,$$

$$W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\} .$$

2. Nello spazio vettoriale $\mathscr{V}(\mathbb{R})$ dei vettori geometrici, siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ due vettori non nulli ed aventi direzioni distinte ($\mathbf{0} \neq \boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$). Si dica se i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathscr{V}(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \{\lambda \boldsymbol{u} : \lambda \in \mathbb{R}\} ,$$

$$W_2 = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} ,$$

$$W_3 = W_1 \cup \{\boldsymbol{v}\} .$$

3. Nello spazio vettoriale $\mathscr{V}(\mathbb{R})$ si considerino due vettori $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0} \neq \boldsymbol{v}_2$ tali che $\boldsymbol{v}_1 \nparallel \boldsymbol{v}_2$. Definiamo

$$W = \{\lambda \boldsymbol{v}_1 + \mu \boldsymbol{v}_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} .$$

Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathscr{V}(\mathbb{R})$.

4. In $\mathbb{C}^3$, si dica se

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale.

5. In $\mathbb{R}[x]$, si dica se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali (indichiamo con $\deg(f(x))$ il grado del polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$):

$$W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(p(x)) = 3\} ;$$

$$W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(p(x)) \leq 3\} ;$$

$$W_3 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 0\} ;$$

$$W_4 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(1) = 0\} ;$$

$$W_5 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) \text{ è irriducibile}\} .$$

6. Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, W un sottospazio di $V(\mathbb{K})$ e $\boldsymbol{v} \in V(\mathbb{K})$. Dimostrare che l'insieme

$$\boldsymbol{v} + W = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ se e solo se $\boldsymbol{v} \in W$.

7. Si determinino i polinomi $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ in modo tale che il grafico

$$\Gamma = \{(t, p(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

8. Si dica se il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\right\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

4 Combinazioni lineari e chiusura

(1.4.1) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Chiamiamo* **combinazione lineare** *dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ a coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ il vettore $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$.*

(1.4.2) Esempio *Si considerino in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, 1)$ e gli scalari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$. Allora $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = (1, -1)$.*

(1.4.3) Osservazione *Se i coefficienti di una combinazione lineare sono tutti nulli, cioè se $\lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.*

(1.4.4) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e A un sottoinsieme non vuoto di V. Chiamiamo* **chiusura di** *A (e la indichiamo con $\langle A \rangle$)*[2] *l'insieme di*

[2] Alcuni Autori indicano la chiusura di A con $\mathrm{Span}(A)$ o con $\mathcal{C}(A)$.

tutti i vettori di V che si ottengono come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A:

$$\langle A \rangle := \left\{ \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \,:\, \boldsymbol{v}_i \in A,\, \lambda_i \in \mathbb{K},\, n \in \mathbb{N} \right\} .$$

(1.4.5) Osservazione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e A un sottoinsieme non vuoto di V. Supponiamo che $A = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$. Allora*

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} .$$

Se ora supponiamo che $A = \{\boldsymbol{0}\}$, risulta $\langle A \rangle = \{\boldsymbol{0}\}$.

(1.4.6) Esempio *In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \{(1,1,0),(2,0,0)\}$. Allora*

$$\langle A \rangle = \{\lambda(1,1,0) + \mu(2,0,0) \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\{(\lambda + 2\mu, \lambda, 0) \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\} =$$

$$= \{(x,y,0) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\} .$$

(1.4.7) Esempio *In $\mathbb{R}^2$ sia $A = \{(1,0),(0,1)\}$. Allora $\langle A \rangle = \mathbb{R}^2$. Infatti:*

$$\langle A \rangle = \{\lambda(1,0) + \mu(0,1) \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \mu) \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 .$$

Più in generale, in $\mathbb{K}^2$ sia $A = \{(1,0),(0,1)\}$. Allora $\langle A \rangle = \mathbb{K}^2$.
Ancora più in generale, in $\mathbb{K}^n$ sia

$$A = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\} .$$

con $|A| = n$. Allora $\langle A \rangle = \mathbb{K}^n$.

(1.4.8) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e A un sottoinsieme non vuoto di V. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) $\langle A \rangle$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$;

(b) $\langle A \rangle$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ che contiene A (ovvero per ogni $W \leq V$ tale che $A \subseteq W$, risulta $\langle A \rangle \leq W$).

Dimostrazione.

(a) Usiamo il criterio di riconoscimento per provare che $\langle A\rangle$ è un sottospazio. Osserviamo $\langle A\rangle \neq \emptyset$ perchè tra le combinazioni lineari c'è anche quella a coefficienti tutti nulli, pertanto $\mathbf{0} \in \langle A\rangle$. Siano ora $\boldsymbol{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \in \langle A\rangle$ e $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{v}_j \in \langle A\rangle$, con $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \in A$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e per ogni $j = 1, \ldots, m$. Allora, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ abbiamo:

$$\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \right) + \mu \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{v}_j \right) =$$

$$= (\lambda\alpha_1)\boldsymbol{u}_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n)\boldsymbol{u}_n + (\mu\beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\mu\beta_m)\boldsymbol{v}_m \,.$$

Poichè $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \in A$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e per ogni $j = 1, \ldots, m$, questa è ancora una combinazione lineare di un numero finito di vettori di A, quindi è un vettore di $\langle A\rangle$.

(b) Innanzi tutto proiamo che $A \subseteq \langle A\rangle$. Infatti, sia $\boldsymbol{w} \in A$. Allora

$$\boldsymbol{w} = 1\boldsymbol{w} + 0\boldsymbol{v}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{v}_n \,,$$

comunque si scelgano $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in A$. Segue che $\boldsymbol{w} \in \langle A\rangle$.
Sia $A \subseteq W \leq V$. Sia dunque $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \in \langle A\rangle$ (con $\boldsymbol{v}_i \in A$ per ogni $i = 1, \ldots, n$). Poichè $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in W$ e $W \leq V$, allora $\lambda_i \boldsymbol{v}_i \in W$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e pertanto $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \in W$, da cui $\langle A\rangle \leq W$. ∎

A norma di questo teorema, diremo che $\langle A\rangle$ è il **sottospazio generato da** A.

(1.4.9) Proposizione (Proprietà della chiusura) *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e A, B due sottoinsiemi non vuoti di V. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *se $A \subseteq B$ risulta $\langle A\rangle \leq \langle B\rangle$;*

(b) *$\langle\langle A\rangle\rangle = \langle A\rangle$;*

(c) *se $A \subseteq B$ e $B \subseteq \langle A\rangle$ risulta $\langle A\rangle = \langle B\rangle$.*

Dimostrazione. Si lasciano come esercizio la verifica delle proprietà (a) e (b). Dimostriamo la (c). Dalla (a) si ha che $\langle A\rangle \leq \langle B\rangle$. Inoltre, per ipotesi $B \subseteq \langle A\rangle$, quindi dalla proprietà (a) si ha $\langle B\rangle \subseteq \langle\langle A\rangle\rangle = \langle A\rangle$ per la proprietà (b). Segue quindi la tesi. ∎

(1.4.10) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e B un sottoinsieme non vuoto di V. Diremo che B è in* **sistema** *(o* **insieme) di generatori** *di $V(\mathbb{K})$ se $\langle B\rangle = V$. Più in generale, se $W \leq V(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale e G un sottoinsieme non vuoto di W, diremo che G è in* **sistema di generatori** *di W se $\langle G\rangle = W$.*

(1.4.11) Definizione *Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Diciamo che $V(\mathbb{K})$ è* **finitamente generato** *se possiede un sistema finito B di generatori.*

Esercizi

Nella risoluzione dei seguenti esercizi si osservi che in alcuni di essi si è ricondotti a discutere sull'esistenza di soluzioni di un opportuno sistema di equazioni lineari.

1. Si dica se $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{K}^n$ sono finitamente generati.

2. In $\mathbb{R}^3$ si dica se l'insieme $B = \{(1,2,0),(0,1,0)\}$ è un insieme di generatori.

3. In $\mathbb{R}^3$ sia

$$B = \{(2,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\ .$$

Verificare che $\langle B\rangle = \mathbb{R}^3$.

4. Si determinino in $\mathbb{R}^3$ le chiusure dei seguenti sottoinsiemi di vettori:

$$A = \{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,1),(-1,0,0)\}\ ;$$

$$B = \{(2,1,0),(1,0,1/2),(0,1,0)\}\ ;$$

$$C = \{(x-3, x, 1+y) : x, y \in \mathbb{R}\} \,.$$

5. Siano $V(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V(\mathbb{R})$. Si dimostri che

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 \rangle$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$.

5 Indipendenza e dipendenza lineare

Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ un insieme di n vettori di $V(\mathbb{K})$.

(1.5.1) Definizione *Diciamo che i vettori di A sono* **linearmente indipendenti** *o* **liberi** *quando l'unica combinazione lineare dei vettori di A che dia il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli, ossia*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \,.$$

(1.5.2) Definizione *Diciamo che i vettori di A sono* **linearmente dipendenti** *o* **legati** *quando esiste una combinazione lineare dei vettori di A a coefficienti non tutti nulli che dia il vettore nullo, ossia esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli, tali che $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.*

(1.5.3) Esercizio *Si consideri in $\mathbb{R}^2$ l'insieme $A = \{(1,1), (2,3)\}$. Verificare se l'insieme A è libero.*

Soluzione. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\,(1,1) + \beta\,(2,3) = (0,0)$. Allora $(\alpha+2\beta, \alpha+3\beta) = (0,0)$, da cui

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \,, \\ \alpha + 3\beta = 0 \,. \end{cases}$$

Segue che $\alpha = \beta = 0$, pertanto A è libero, ovvero i vettori $(1,1)$ e $(2,3)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$. ♣

(1.5.4) Esercizio *Si consideri in* $\mathbb{R}^2$ *l'insieme* $A = \{(-4,-6),(2,3)\}$. *Verificare se l'insieme* A *è libero.*

Soluzione. Impostiamo la stessa relazione vista nell'esercizio precedente per capire se A è un insieme libero o legato. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha(-4,-6) + \beta(2,3) = (0,0)$. Precedendo in modo analogo all'esercizio precedente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0\,, \\ 3\alpha - 6\beta = 0\,. \end{cases}$$

Tale sistema ha per soluzione $\alpha = 2\beta$, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Tale sistema ha, quindi, infinite soluzioni: oltre ad $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, anche tutte le coppie della forma $(2,1)$, $(4,2)$, ... sono soluzioni del sistema. Dunque i vettori di A sono legati. ♣

Si noti che nello svolgimento di ciascuno dei due esercizi precedenti è stato necessario impostare un sistema lineare omogeneo di cui si è discussa l'unicità della soluzione.

(1.5.5) Osservazione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $A = \{\boldsymbol{v}\}$. *Allora, ricordando la Proposizione* (1.2.2), $\lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ *implica che* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ *oppure* $\lambda = 0$. *Quindi, se* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, *allora* λ *può essere uno scalare qualunque, anche non nullo, e ciò significa che in questo caso l'insieme* A *è legato; se invece* $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, *allora deve necessariamente essere* $\lambda = 0$, *dunque* A *è libero. Supponiamo ora che* $A = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$. *Allora*

$$1\boldsymbol{0} + 0\boldsymbol{v}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}\,,$$

pertanto, ogni insieme di vettori che contiene il vettore nullo $\boldsymbol{0}$ *è legato.*

In generale, possiamo provare il seguente

(1.5.6) Teorema *Sia* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ n *vettori in* V. *Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) *i vettori* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *sono linearmente dipendenti;*

(*b*) *esiste un* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *tale che* $\boldsymbol{v}_j$ *si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti* $(n-1)$ *vettori.*

Dimostrazione.
(*a*) $\Longrightarrow$ (*b*). Poniamo $A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$. Supponiamo che A sia legato, ossia esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}\,. \tag{1.5.7}$$

Non è restrittivo supporre $\lambda_1 \neq 0$. Allora esiste $\lambda_1^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Moltiplicando scalarmente la (1.5.7) per λ_1^{-1}, otteniamo:

$$\lambda_1^{-1}\left(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n\right) = \lambda_1^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

ovvero

$$\lambda_1^{-1}\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_1^{-1}\lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_1^{-1}\lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{v}_1 = -\lambda_1^{-1}\lambda_2 \boldsymbol{v}_2 - \ldots - \lambda_1^{-1}\lambda_n \boldsymbol{v}_n\,,$$

che è la tesi.
(*b*) $\Longrightarrow$ (*a*). Supponiamo, ad esempio, $\boldsymbol{v}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$. Segue che

$$\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 - \ldots - \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}\,.$$

Questa è una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ che dà $\mathbf{0}$ e i cui coefficienti sono non tutti nulli, poichè il primo è 1. Allora l'insieme

$$A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

è legato, ovvero i vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sono linearmente dipendenti. ∎

(1.5.8) Osservazione *Il Teorema* (1.5.6) *afferma che, se i vettori di A sono linearmente dipendenti, allora un* opportuno *vettore di A è combinazione lineare dei rimanenti. Ciò non significa che un* qualsiasi *vettore di A sia combinazione dei rimanenti.*
Dalla dimostrazione del teorema precedente risulta infatti che in un insieme di vettori linearmente dipendenti è possibile esprimerne uno come combinazione lineare

degli altri, purchè il suo coefficiente nella combinazione lineare che dà il vettore nullo sia diverso da zero.

(1.5.9) Esempio *In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'insieme*

$$A = \{\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0), \boldsymbol{v}_2 = (2, 0, 0), \boldsymbol{v}_3 = (0, 2, 0), \boldsymbol{v}_4 = (0, 1, 1)\} \ .$$

Risulta allora che $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + 0\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$. Quindi i vettori di A sono linearmente dipendenti e infatti, per esempio, il vettore $\boldsymbol{v}_3$ è combinazione lineare degli altri:

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_4 \,,$$

ma $\boldsymbol{v}_4$ non è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$.

(1.5.10) Proposizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $A = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq B$, con B sottoinsieme finito di V. Se A è legato allora anche B è legato.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. Poniamo

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_1 \ \dots, \boldsymbol{w}_k\} \ .$$

Tuttavia

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{k} 0\boldsymbol{w}_j \,,$$

e i coefficienti della precedente combinazione lineare non sono tutti nulli. Segue che B è legato. ■

(1.5.11) Osservazione *La precedente proposizione equivale ad affermare che se un sottoinsieme finito $B \subseteq V$ è libero, allora ogni suo sottoinsieme non vuoto è libero.*

D'altra parte, se consideriamo un sottoinsieme finito $B \subseteq V$, se ogni suo sottoinsieme non vuoto è libero risulta banalmente che B stesso è libero. Ha perciò senso estendere nel seguente modo la definizione di sottoinsiemi liberi e legati anche al caso in cui questi non siano necessariamente finiti:

(1.5.12) Definizione *Diciamo un sottoinsieme $A \subseteq V$ è* **libero** *(o che i suoi vettori sono* linearmente indipendenti*) quando ogni sottoinsieme finito di A è libero. In caso contrario, diremo che A è* **legato** *(o che i suoi vettori sono* linearmente dipendenti*).*

(1.5.13) Proposizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e*

$$A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\ , \qquad A' = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}\}$$

due sottoinsiemi di V. Supponiamo che A sia libero ed A' sia legato. Allora $\boldsymbol{w}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. In altre parole, $\boldsymbol{w} \in \langle A \rangle$.

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{w} = \mathbf{0}\,. \tag{1.5.14}$$

Considerando il coefficiente α_{n+1}, osserviamo che se fosse $\alpha_{n+1} = 0$ la (1.5.14) diventerebbe $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ a coefficienti non tutti nulli, per cui A sarebbe legato, contro l'ipotesi. Allora è necessariamente $\alpha_{n+1} \neq 0$, pertanto esiste $\alpha_{n+1}^{-1} \in \mathbb{K}^*$ e

$$\boldsymbol{w} = -\alpha_{n+1}^{-1} \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 - \ldots - \alpha_{n+1}^{-1} \alpha_n \boldsymbol{v}_n\,,$$

cioè $\boldsymbol{w}$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. ∎

Le due osservazioni che seguono cominciano a gettare luce sull'importanza della nozione di indipendenza lineare pur in ambiti apparentemente distinti, quali sono quello degli spazi vettoriali e quello dei sistemi lineari.

(1.5.15) Osservazione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale ed $A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ un sottoinsieme di V. Supponiamo che $V(\mathbb{K}) = \langle A \rangle$. Ci chiediamo se i $\boldsymbol{v}_i$ sono tutti essenziali per generare V. Se, per esempio, $\boldsymbol{v}_n$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$, allora $\boldsymbol{v}_n \in \langle\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}\rangle$, e quindi, da $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq \langle\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}\rangle$, ricordando la* (c) *della Proposizione* (1.4.9)*, otteniamo:*

$$\langle\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}\rangle = \langle\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n\}\rangle = \langle A \rangle = V\,.$$

Pertanto, per generare V bastano $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$.

(1.5.16) Osservazione *Nel sistema lineare*

$$\begin{cases} x+y+z=0\,, \\ 2x-y+z=0\,, \\ 3x+2z=0\,, \end{cases}$$

la terza equazione è combinazione lineare delle prime due. Allora ogni terna (x,y,z) *che è soluzione di*

$$\begin{cases} x+y+z=0\,, \\ 2x-y+z=0\,, \end{cases}$$

è soluzione anche del sistema di partenza.

Indipendenza lineare corrisponde dunque ad essenzialità ed economia. Non è poi casuale l'aver scelto di trattare come esempio un sistema lineare: si capirà più avanti quanto stretto e indissolubile sia in realtà il legame fra la teoria degli spazi vettoriali e quella dei sistemi di equazioni lineari. Del resto qualche cenno su questo legame si è già visto in precedenza, quando sono stati utilizzati sistemi lineari per risolvere questioni riguardanti generatori, chiusure, indipendenza e dipendenza lineare (Esercizi di pag 17 ed 1.5.3, 1.5.4)

Esercizi

1. In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si verifichi se gli insiemi

$$A=\{(0,1),(1,1)\} \qquad B=\{(1,1),(0,1),(1,0)\}$$

sono liberi o legati.

2. In $\mathbb{R}[x]$ si stabilisca se l'insieme

$$A=\{x, x+x^2, x^2+4x\}$$

è libero o legato.

3. Nello spazio vettoriale reale V delle funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si dica se i seguenti sottoinsiemi sono liberi o legati:

$$A=\{\alpha, \cos, \sin\} \qquad B=\{\beta, \cos^2, \sin^2\}\,,$$

dove, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\alpha(x) = 2$ e $\beta(x) = 1$.

4. In $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ si stabilisca se l'insieme

$$A = \{(1+i, i), (-1+i, -1)\}$$

è libero o legato.

5. Siano $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ tre vettori di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$. Supponiamo che $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ e $\boldsymbol{w}_3$ siano linearmente indipendenti. Si può affermare che $(\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2)$, $(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)$ e $\boldsymbol{w}_3$ sono linearmente indipendenti?

6 Basi di uno spazio vettoriale

(1.6.1) Definizione *Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Una* **base** *di $V(\mathbb{K})$ è un insieme non vuoto $\mathcal{B}$ di vettori tali che:*

(a) $\langle \mathcal{B} \rangle = V$, ovvero $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori per $V(\mathbb{K})$;

(b) $\mathcal{B}$ è libero, cioè ogni suo sottoinsieme finito è libero (cfr. (1.5.12).

Se $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ è una base finita ed introduciamo un ordinamento tra i vettori di $\mathcal{B}$, ovvero consideriamo $\mathcal{B}$ come una n-upla ordinata di vettori, parliamo di *base ordinata*

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \, .$$

(1.6.2) Osservazione *Se $V = \{\boldsymbol{0}\}$, allora V non ha vettori linearmente indipendenti e quindi non ha base.*

(1.6.3) Esempio *In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ l'insieme*

$$\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$$

è una base. In modo analogo, in $\mathbb{K}^2(\mathbb{K})$ l'insieme $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^2(\mathbb{K})$. In generale, in $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$, l'insieme

$$\mathcal{B} = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\} \, , \qquad |\mathcal{B}| = n \, ,$$

è una base. Tale base viene chiamata **base canonica** *di* $\mathbb{K}^n$*.*

(1.6.4) Esempio *Si consideri*

$$\mathbb{K}_n[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \,:\, a_i \in \mathbb{K},\, \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Allora una possibile base per $\mathbb{K}_n[x]$ *è data da* $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$*, con* $|\mathcal{B}| = n+1$*. Se consideriamo ora*

$$\mathbb{K}[x] := \left\{ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \,:\, n \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathbb{K},\, \forall i = 1, \ldots, n \right\},$$

abbiamo che una possibile base per $\mathbb{K}[x]$ *è data da* $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, \}$*, pertanto* $|\mathcal{B}| = \infty$*.*

(1.6.5) Esercizio *In* $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ *si consideri l'insieme*

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-2)\}.$$

Si dica se $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$*.*

Soluzione. Sia $\boldsymbol{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un generico vettore. Ci chiediamo se esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x(1,1) + y(1,-2) = \boldsymbol{v}$. Basta scegliere $x = a - (a-b)/3$ e $y = (a-b)/3$. Segue che $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{R}^2$.
Verifichiamo ora che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti. Sia

$$\mathbf{0} = x(1,1) + y(1,-2).$$

Con semplici calcoli, si può verificare che risulta necessariamente $x = y = 0$, da cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. ♣

(1.6.6) Teorema *Sia* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale finitamente generato e non banale. Allora* $V(\mathbb{K})$ *ammette almeno una base.*

Dimostrazione. Diamo una traccia della dimostrazione. Per ipotesi, esiste un insieme

$$A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

con $\langle A \rangle = V$ e $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ non sono tutti nulli poichè $V(\mathbb{K}) \neq \{\mathbf{0}\}$. Se A è libero, allora A è la base cercata. Se A è legato, allora uno dei vettori di A è combinazione lineare dei rimanenti. Sia $\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$. Consideriamo allora l'insieme

$$A_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{n-1}\},$$

quindi $A_1 \subseteq A$ e $A \subseteq \langle A_1 \rangle$, pertanto $\langle A \rangle = \langle A_1 \rangle = V$. Deduciamo che anche A_1 è un insieme di $n-1$ elementi che genera V. Ripetiamo su A_1 le considerazioni fatte su A: se A_1 è libero, allora A_1 è una base per V, altrimenti uno dei vettori di A_1 è combinazione lineare dei rimanenti $n-2$ vettori. Supponiamo che $\boldsymbol{v}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i \boldsymbol{v}_i$. Consideriamo allora l'insieme

$$A_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{n-2}\},$$

quindi $A_2 \subseteq A_1$ e $A_1 \subseteq \langle A_2 \rangle$, pertanto $\langle A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle = V$, cioè anche A_2 è un insieme di generatori per V. Se A_2 è libero, allora è una base per V, altrimenti si continua come nei passi precedenti. Il processo deve avere un termine perchè A è finito: esisterà quindi un insieme

$$A_p = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$$

tale che $\langle A_p \rangle = V$ ed A_p è libero. Allora A_p è la base cercata. ∎

(1.6.7) Corollario *Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e A un sottoinsieme finito di generatori per $V(\mathbb{K})$. Allora si può sempre estrarre da A una base per $V(\mathbb{K})$.*

Dimostreremo ora alcune proprietà fondamentali degli spazi vettoriali *finitamente generati* (accenniamo solo che alcune di queste proprietà possono essere estese anche al caso non finitamente generato) e delle loro basi.

(1.6.8) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ una base ordinata per $V(\mathbb{K})$. Allora ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. Sia $\boldsymbol{v} \in V$ un generico vettore. Allora

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \,,$$

per certi $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Supponiamo che

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{v}_i \,.$$

Segue che

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \boldsymbol{v}_i \,.$$

Dal fatto che $\mathcal{B}$ è un insieme libero, deve essere $x_i - y_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, da cui $x_i = y_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. ■

Il teorema appena dimostrato è di importanza fondamentale nella teoria degli spazi vettoriali finitamente generati, in quanto, come illustriamo nella seguente osservazione, permette, una volta effettuata la scelta di una base , di identificare ciascun vettore dello spazio con una n-upla ordinata di elementi di K (dove n è la cardinalità della base), ovvero di identificare lo spazio dato con lo spazio K^n.

(1.6.9) Osservazione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n)$ una base ordinata di $V(\mathbb{K})$. Per ogni $\boldsymbol{v} \in V(\mathbb{K})$ si ha $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ e la n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n)$ è univocamente associata a $\boldsymbol{v}$. Ne nasce un'applicazione*

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \,. \end{array} \right.$$

Chiamiamo la n-upla $(x_1 \ldots, x_n) =: \boldsymbol{x}$ le **componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$**.
L'applicazione $\varphi_{\mathcal{B}}$ è una bijezione: infatti ogni n-upla ordinata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ individua una ed una sola controimmagine

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \in V \,.$$

Tale biiezione $\varphi_{\mathcal{B}}$, che dipende dalla scelta di una base ordinata $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ di $V(\mathbb{K})$, ci permette di identificare ogni vettore $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ di $V(\mathbb{K})$ con la n-upla ordinata delle sue componenti $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Se ora si sceglie un'altra base $\mathcal{B}'$ di $V(\mathbb{K})$, cambierà ovviamente la rappresentazione del vettore $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare rispetto agli elementi di $\mathcal{B}'$, cambierà la biiezione $\varphi_{\mathcal{B}'}$, cambieranno quindi le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla nuova base. Ci poniamo quindi due domande:

(1) tali componenti cambieranno anche in numero (cioè i vettori di $\mathcal{B}'$ possono essere in numero diverso da quelli di $\mathcal{B}$)?

(2) come si esprimeranno le nuove componenti in funzione delle precedenti?

Alla seconda domanda risponderemo in seguito. Per rispondere alla prima domanda, enunciamo il seguente teorema e i successivi corollari (in particolare il terzo).

(1.6.10) Teorema (di Steinitz o del completamento della base) *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato e $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una sua base. Se $A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ è un insieme di p ($p \leq n$) vettori linearmente indipendenti, allora è possibile formare una nuova base aggiungendo $n-p$ vettori opportunamente scelti in $\mathcal{B}$ ai vettori di A.*

Tralasciamo la dimostrazione di questo teorema, ma per comprenderne meglio il contenuto rimandiamo al successivo esercizio 1.6.16.

(1.6.11) Corollario *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base di $V(\mathbb{K})$ ed $A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ un sottoinsieme libero di n vettori di V. Allora A è una base per $V(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. É una conseguenza immediata del Teorema (1.6.10). Infatti, in questo caso, $p = n$ e quindi $n - p = 0$. ■

(1.6.12) Corollario *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale,* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ *una base di* $V(\mathbb{K})$ *ed* $A = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ *un sottoinsieme di generatori per* $V(\mathbb{K})$*, ossia* $\langle A \rangle = V$*. Allora* A *è una base per* $V(\mathbb{K})$*.*

Dimostrazione. Dal Corollario (1.6.7) deduciamo che si può estrarre da A una base $A' = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p\}$ con $p \leq n$ e, poichè A' è già una base, ad essa possiamo aggiungere $0 = n - p$ vettori per formare una nuova base. Segue che $p = n$, da cui $A' = A$. ∎

(1.6.13) Corollario *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale finitamente generato e* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *due basi di* $V(\mathbb{K})$*. Allora* $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che $|\mathcal{A}| = p$ e $|\mathcal{B}| = n$, con $p \leq n$. Dal Teorema di Steinitz segue subito che $p = n$. ∎

L'ultimo corollario ci assicura dunque che in uno spazio vettoriale finitamente generato tutte le basi hanno la stessa cardinalità (si noti che tale risultato si può ottenere, con i metodi dell'aritmetica transfinita, anche per spazi non finitamente generati; per una trattazione completa di questo caso si rimanda per esempio ai Complementi al Capitolo 4 del testo M. Abate, Geometria, McGraw-Hill, Milano, 1996). Sarà quindi ben posta la seguente

(1.6.14) Definizione *Sia* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale. Se esiste un* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $V(\mathbb{K})$ *ammetta una base di* n *vettori, chiamiamo* **dimensione di** $V(\mathbb{K})$ *lo scalare* n*. Indicheremo la dimensione di* $V(\mathbb{K})$ *con* $\dim(V(\mathbb{K}))$ *oppure con* $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ *o, più semplicemente, con* $\dim V$*.*
Se $V(\mathbb{K}) = \{\mathbf{0}\}$*, conveniamo che la dimensione di* $V(\mathbb{K})$ *sia zero. Se tale intero* n *non esiste, diremo che* $V(\mathbb{K})$ *ha dimensione infinita.*

Se $\dim(V(\mathbb{K})) = n$, useremo anche la notazione $V_n(\mathbb{K})$.

(1.6.15) Osservazione *Sia* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale di dimensione* n*. Allora:*

(a) *ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti è una base di $V_n(\mathbb{K})$ (è il corollario (1.6.11);*

(b) *in $V_n(\mathbb{K})$, n è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.*

La parte (b) dell'Osservazione può essere dimostrata per esercizio dal lettore.

Vediamo ora un esercizio che illustra il Teorema di Steinitz.

(1.6.16) Esercizio *In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori*

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,0)\,, \qquad \boldsymbol{v}_2 = (1,2,3,4)\,.$$

Si dimostri che $A = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ libero. Si completi poi A ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione. I vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Infatti il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0\,, \\ 2\beta = 0\,, \\ \alpha + 3\beta = 0\,, \\ 4\beta = 0\,, \end{cases}$$

ammette come unica soluzione $\alpha = \beta = 0$.

Completiamo ora A ad una base di $\mathbb{R}^4$, procedendo nel modo seguente:

– Scriviamo $\boldsymbol{v}_1$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$, indicata con $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_4\}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4\,.$$

– Sostituiamo, nella base $\mathcal{B}$, il vettore $\boldsymbol{v}_1$ al posto di uno qualunque degli $\boldsymbol{e}_i$ che compaiono con coefficiente non nullo nella combinazione lineare che esprime $\boldsymbol{v}_1$:

$$\mathcal{B}_1 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\,.$$

– Scriviamo $\boldsymbol{v}_2$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_1$:

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 + 4\boldsymbol{e}_4\,.$$

– Sostituiamo $\boldsymbol{v}_2$ al posto di uno qualunque dei vettori di $\mathcal{B}_1$ (escluso $\boldsymbol{v}_1$) che compaiono con coefficiente non nullo:

$$\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\,.$$

Abbiamo così completato A alla nuova base $\mathcal{B}_2$. Si lascia come esercizio di controllare che in effetti $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi per $\mathbb{R}^4$. ♣

I vari passi dello svolgimento del precedente esercizio ricalcano i passi della dimostrazione del Teorema di Steinitz.

Elenchiamo ora alcune proprietà dei sottospazi legate al concetto di dimensione.

(1.6.17) Proposizione *Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Allora esistono sottospazi vettoriali W di $V_n(\mathbb{K})$ tale che* $\dim W = h$ *per ogni* $0 \leq h \leq n$.

Dimostrazione. Se $n = 0$, scegliamo $W = \{\mathbf{0}\} = V$. Sia ora $n > 0$. Per $h = 0$, sia $W_0 = \{\mathbf{0}\} \leq V$. Basterà poi prendere una base $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ di $V_n(\mathbb{K})$ e, per ogni $1 \leq h \leq n$, considerare $W_h := \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_h \rangle$. ■

(1.6.18) Proposizione *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e W un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$. Allora* $0 \leq \dim W \leq n$.
In particolare, ogni sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione finita n ha dimensione finita $m \leq n$.

Dimostrazione. Sia $m = \dim W$ e sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ una base per W. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo quindi che $m > n$. Dal fatto che $\mathcal{B}$ è libero, abbiamo che $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ è a sua volta libero per 1.5.10 e quindi è una base per $V_n(\mathbb{K})$: da ciò segue che $\boldsymbol{w}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ sono esprimibili come combinazione lineare di $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$. Ne segue che $\mathcal{B}$ è un insieme legato, il che è assurdo. ■

(1.6.19) Proposizione *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* U, W *due sottospazi vettoriali di* $V_n(\mathbb{K})$. *Supponiamo che* $U \subseteq W$ *e* $\dim U = \dim W$. *Allora* $U = W$.

Dimostrazione. Sia $\dim U = m$ e sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ una base di U. Dal fatto che $U \subseteq W$, segue che $\mathcal{B} \subseteq W$. Inoltre, poichè $\dim U = \dim W$, risulta che $\mathcal{B}$ è base anche di W. Allora $W = \langle \mathcal{B} \rangle = U$. ■

Esercizi

1. Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base per $\mathbb{K}_n[x]$.

2. Determinare la dimensione di $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ e di $\mathbb{C}(\mathbb{C})$.

3. Sia $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici 3×3 a coefficienti reali. Determinare una base per $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$.

4. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il vettore $\boldsymbol{v} = (4, 8, 8)$. Determinare le componenti di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 1), \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 2), \boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 1)\}.$$

5. Verificare se i seguenti sottoinsiemi sono generatori per $\mathbb{R}_3[x]$:

$$A = \{x, x + 1, x^2 - 1\},$$

$$B = \{x^2 + 1, 2x, x^3 - 1, x + 2\},$$

$$C = \{x + 1, x^2 + x, x^3 + x, x^3 + x^2, 2x\}.$$

6. Dimostrare che le funzioni $\sin t$, $\sin(2t)$, $\ldots$, $\sin(nt)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, qualunque sia l'intero $n \geq 1$.

7. Si consideri lo spazio vettoriale di tutte le funzioni reali definite per $t \in]0, +\infty[$. Dimostrare che le seguenti coppie di funzioni sono linearmente indipendenti:

$$t,\ \frac{1}{t}, \qquad\qquad e^t,\ \log t\,.$$

8. Si determinino i valori di $t \in \mathbb{R}$ affinchè l'insieme

$$A = \{(2,t), (t,2)\}$$

sia una base di $\mathbb{R}^2$.

9. Si dimostri che l'insieme

$$A = \{(a,c), (b,d)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo se $ad - bc \neq 0$.

7 Somme ed intersezioni di sottospazi

(1.7.1) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$. Allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Notiamo innanzi tutto che $\mathbf{0} \in U \cap W \neq \emptyset$. Possiamo quindi usare il criterio di riconoscimento di sottospazi. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U \cap W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Allora $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W$. Dal fatto che sia U sia W sono sottospazi di $V(\mathbb{K})$, segue che $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in U$ e $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in W$. Pertanto $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in U \cap W$, da cui la tesi. $\blacksquare$

Generalizzando ad un numero finito qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ di sottospazi:

(1.7.2) Corollario *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $W_1, \ldots, W_t$ sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$ Allora*

$$\bigcap_{i=1}^{t} W_i = W_1 \cap \ldots \cap W_t$$

è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$.

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(1.7.3) Osservazione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi di $V(\mathbb{K})$. Allora, in generale, non è detto che $U \cup W$ sia un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$.*

(1.7.4) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi di $V(\mathbb{K})$. Si definisce* **somma** *dei due sottospazi l'insieme*

$$U + W := \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\} .$$

(1.7.5) Osservazione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi di $V(\mathbb{K})$. Allora $U \cup W \subseteq U + W$.*

Dimostrazione. La verifica è immediata se si considera che $U = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} : \boldsymbol{u} \in U\} \subseteq U + W$ e $W = \{\boldsymbol{0} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} \in W\} \subseteq U + W$. ■

(1.7.6) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi di $V(\mathbb{K})$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *$U + W$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$;*

(b) *$U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ che contiene sia U che W, dunque $U + W = \langle U \cup W \rangle$.*

Dimostrazione.
(a) Utilizziamo il criterio di riconoscimento dei sottospazi poichè $U + W \neq \emptyset$ (in quanto $U, W \leq U + W$). Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in U + W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dal fatto che $\boldsymbol{v}_1 \in U + W$ esistono $\boldsymbol{u}_1 \in U$ e $\boldsymbol{w}_1 \in W$ tali che $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1$. Dal fatto che $\boldsymbol{v}_2 \in U + W$ esistono $\boldsymbol{u}_2 \in U$ e $\boldsymbol{w}_2 \in W$ tali che $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2$. Allora

$$\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 = \alpha(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1) + \beta(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2) = (\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2) + (\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2) \in U + W\,.$$

(b) Esercizio. ■

Generalizzando ad un qualunque $t \in \mathbb{N}$:

(1.7.7) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $V_1, \ldots, V_t$ sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$. Definiamo* **somma dei t sottospazi vettoriali** *l'insieme*

$$V_1 + \ldots + V_t := \{\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_t \,:\, \boldsymbol{v}_i \in V_i,\, i = 1, ...t\}\,.$$

(1.7.8) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $V_1, \ldots, V_t$ sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *$V_1 + \ldots + V_t$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$;*

(b) *$V_1 + \ldots + V_t = \langle V_1 \cup \ldots \cup V_t\rangle$.*

Dimostrazione. É sufficiente imitare la dimostrazione del Teorema (1.7.6). ■

(1.7.9) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$. Diciamo che U e W sono* **in somma diretta** *se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, e in tal caso scriveremo $U \oplus W \subseteq V$. In particolare $V(\mathbb{K})$ è* **somma diretta** *di U e W se*

(a) *$V = U + W$;*

(b) *$U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.*

In tal caso scriveremo $V = U \oplus W$ e diremo che W (risp. U) è **complemento diretto** *di U (risp. di W) in V. Diremo anche che V* **si fattorizza** *nei sottospazi U e W.*

(1.7.10) Teorema *Siano $V = V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \in N$ e U un sottospazio vettoriale di V. Allora esiste un complemento diretto per U.*

Dimostrazione. Sia $r = \dim U$. Sia $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ una base di U. Per il Teorema di Steinitz, si potrà completare $\mathcal{B}_U$ ad una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-r}\}$ di V. Allora $V = U + W$, dove $W = \langle\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-r}\}\rangle$, con $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ perchè se ci fosse un vettore non nullo nell'intersezione, questo sarebbe combinazione lineare sia degli u_i che dei w_i, il che implicherebbe che gli u_i, w_i siano linearmente dipendenti, in contraddizione col fatto che formano una base per V. Pertanto $U + W = U \oplus W$. ■

Si noti che il complemento diretto di un sottospazio non è univocamente determinato.
Osserviamo inoltre che il precedente risultato si può ottenere anche per spazi vettoriali non finitamente generati.

(1.7.11) Esempio *In $\mathbb{K}^2$ siano*

$$U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{K}\} , \qquad W = \{(0, y) : y \in \mathbb{K}\} .$$

Allora $\mathbb{K}^2 = U \oplus W$.

(1.7.12) Esempio *In $\mathbb{K}^3$ si considerino i sottospazi*

$$U = \langle(1, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle \qquad W = \langle(1, 0, 0)\rangle .$$

Allora $\mathbb{K}^3 = U \oplus W$.

(1.7.13) Esempio *In $\mathbb{K}^3$ si considerino i sottospazi*

$$U = \langle(1, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle , \qquad W = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle .$$

Allora $\mathbb{K}^3 = U + W$, *ma* $U \cap W = \langle (1,1,0) \rangle \neq \{\mathbf{0}\}$.

Il seguente teorema chiarisce il l'importanza del concetto di somma diretta mettendo in luce il significato del termine fattorizzarsi:

(1.7.14) Teorema *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* U, W *due sottospazi di* $V(\mathbb{K})$. *Allora si ha* $V = U \oplus W$ *se, e solo se, ogni vettore* $\boldsymbol{v} \in V$ *si può scrivere in uno ed un solo modo come somma di un vettore di* U *e di un vettore di* W.

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si può scrivere come somma di un vettore di U e di un vettore di W se e solo se $V = U + W$ per definizione di somma di sottospazi vettoriali. Dobbiamo dunque provare soltanto l'equivalenza della condizione $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ con l'unicità della rappresentazione di un generico vettore $\boldsymbol{v} \in V$ come somma di un vettore di U ed uno di W.
Sia dunque $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Allora se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2$ con $\boldsymbol{u}_i \in U$, $\boldsymbol{w}_i \in W$ per $i = 1, 2$, risulta $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 \in U \cap W$, da cui $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 = \mathbf{0}$, pertanto $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$.
Viceversa, se ogni $\boldsymbol{v} \in V$ ammette un'unica rappresentazione $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ con $\boldsymbol{u} \in U$ e $\boldsymbol{w} \in W$ e se $\boldsymbol{x} \in U \cap W$, abbiamo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{w}'$ dove $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x} \in W$. Allora, per ipotesi, deve essere $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'$ da cui $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ e dunque $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. ∎

Anche qui possiamo generalizzare la nozione ad un numero finito qualsiasi $t \in \mathbb{N}$ di sottospazi vettoriali.

(1.7.15) Definizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $V_1, \ldots, V_t$ *sottospazi vettoriali di* $V(\mathbb{K})$. *Diciamo che* $V(\mathbb{K})$ *è* **somma diretta di** $V_1, \ldots, V_t$ *se*

(a) $V = V_1 + \ldots + V_t$;

(b) $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_t) = \{\mathbf{0}\}$ *per ogni* $i = 1 \ldots t$.

In tal caso scriveremo $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$, *oppure*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_i\,.$$

(1.7.16) Teorema *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $V_1, \ldots, V_t$ *sottospazi vettoriali di* $V(\mathbb{K})$. *Allora* $V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_i$ *se, e solo se, per ogni* $\boldsymbol{v} \in V$ *esistono e sono unici i vettori* $\boldsymbol{v}_1 \in V_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t \in V_t$ *tali che* $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{v}_i$.

(1.7.17) Osservazione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $U, W, V_1, \ldots, V_t$ *sottospazi vettoriali di* $V(\mathbb{K})$. *In generale scriveremo*

$$U \oplus W \leq V \quad \textit{anzichè} \quad U + W \leq V\,,$$

$$\bigoplus_{i=1}^{t} V_i \leq V \quad \textit{anzichè} \quad \sum_{i=1}^{t} V_i \leq V\,,$$

vedi
ERRATA CORRIGE!

quando $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ *o, rispettivamente,* $\boxed{V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\} \textit{ per ogni } i, j = 1, \ldots, t}$ *con* $i \neq j$ *e parleremo di* somma diretta *dei sottospazi dati.*

Ci chiediamo ora se dati due sottospazi vettoriali U e W di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ è possibile calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$ conoscendo le dimensioni di U e di W.

(1.7.18) Lemma *Siano* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale,* U, W *due sottospazi vettoriali di* $V(\mathbb{K})$ *e* G_U, G_W *due sistemi di generatori rispettivamente per* U *e* W. *Allora* $G_U \cup G_W$ *è un sistema di generatori per* $U + W$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{v} \in U + W$. Esistono $\boldsymbol{u} \in U$ e $\boldsymbol{w} \in W$ tali che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$. Poniamo

$$G_U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}\,, \qquad G_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}\,.$$

Allora $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{u}_i$ e $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \boldsymbol{w}_j$. Pertanto:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \boldsymbol{w}_j \in \langle G_U \cup G_W \rangle\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.7.19) Osservazione *Se dunque U e W sono due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_W$ due basi rispettivamente di U e W, risulta che $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un sistema di generatori per $U + W$ ma, si noti, non necessariamente una base. Infatti i vettori di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ potrebbero essere linearmente dipendenti ed anzi si dimostra che ciò avviene esattamente quando i due sottospazi hanno intersezione non banale. In tal modo si prova anche che la differenza fra* $\dim U + \dim W$ *e* $\dim(U + W)$ *è data proprio dalla dimensione dell'intersezione: tale risultato (di cui qui si omette la dimostrazione che si può trovare sui testi citati in bibliografia) si può esprimere enunciando il seguente*

(1.7.20) Teorema (formula di Grassmann) *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e siano U, W due sottospazi di $V(\mathbb{K})$ finitamente generati. Allora si ha:* $\dim(U \cap W) < +\infty$, $\dim(U + W) < +\infty$ *e*

$$\boxed{\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)\,.}$$

(1.7.21) Osservazione *Dalla formula precedente risulta che* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ *se, e solo se,* $\dim(U \cap W) = 0$*, cioè la dimensione del sottospazio somma di due sottospazi U e V coincide con la somma delle dimensioni se e solo i due sottospazi U e V sono in somma diretta.*

Esercizi

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x - 2y + z = 0\right\}, \qquad W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, 2x + z = 0\right\}.$$

Si chiede di

(a) determinare il sottospazio $U \cap W$;

(b) provare che $\mathbb{R}^3 = U + W$ ma che $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta di U e di W;

(c) dare un esempio di un sottospazio Z complemento diretto di U.

2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni di variabile reale a valori reali e siano P e D i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cosituiti rispettivamente dalle funzioni pari o dispari, cioè

$$P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = f(-x)\,, \forall x \in \mathbb{R}\}\ ,$$

$$D = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ g(-x) = -g(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}\}\ .$$

Provare che P e D sono sottospazi di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dimostrare che $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus D$ e rappresentare ogni funzione $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.
(*Suggerimento*: si tenga presente che qualunque sia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si ha

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))\,,$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.)

3. Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e U, W due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$. Dimostrare che valgono i seguenti fatti:

(a) $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ se e solo se $U \subset W$ oppure $W \subset U$;

(b) $U + W = W$ se e solo se $U \subset W$.

4. Si consideri l'insieme $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ ad elementi reali di ordine n.

(a) Verificare che $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle operazioni si somma di matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice. Di che dimensione è?

(b) In $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ si considerino i sottoinsiemi $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Skw}_n(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e antisimmetriche. Si provi che $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Skw}_n(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ed inoltre che $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Skw}_n(\mathbb{R})$.

5. Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e S_1, S_2 due sottoinsiemi di $V(\mathbb{K})$. Si dimostri che

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle \ .$$

6. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = \langle (3, 11, 5, 2), (1, 5, 2, 1), (1, 1, 1, 0) \rangle$$

e

$$U_2 = \langle (1, 3, 2, 2), (1, 3, 2, 4), (2, 6, 2, 5) \rangle \ .$$

Si dimostri che $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$. Sia ora $\boldsymbol{e}_i$ l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$, si ponga $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2 + 8\boldsymbol{e}_3 + 3\boldsymbol{e}_4$. Trovare $\boldsymbol{u}_1 \in U_1$ e $\boldsymbol{u}_2 \in U_2$ tali che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$.

7. Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1, 0, 3, 0), (0, 1, -1, 1) \rangle \ , \qquad W = \langle (1, 1, 4, 1), (-1, 1, 2, 1), (0, 3, 5, 3) \rangle \ ,$$

trovare una base per U, W, $U + W$ e per $U \cap W$.

8 Dipendenza e indipendenza lineare e matrici

Le considerazioni che abbiamo appena fatto ci permettono di legare la dipendenza e indipendenza lineare di vettori ai determinanti di opportune matrici. Prima di mostrare questo legame, premettiamo un'osservazione fondamentale:

(1.8.1) Osservazione *Se in $V_n(\mathbb{K})$ si fissa una base ordinata $\mathcal{B}$ e si considera la bijezione $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ definita nell'osservazione (1.6.9), si può provare con una semplice verifica che, $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V(\mathbb{K})$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:*

(1) $\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}) + \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{w})$,

(2) $\varphi_{\mathcal{B}}(\alpha \ \boldsymbol{v}) = \alpha \ \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$.

Queste due proprietà si esprimono dicendo che $\varphi_{\mathcal{B}}$ *conserva le operazioni di spazio vettoriale* (addizione vettoriale e moltiplicazione per scalari).

(1.8.2) Teorema *Si consideri in uno spazio vettoriale $V = V_n(\mathbb{K})$ di dimensione n un insieme $S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$ di n vettori. Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) *l'insieme S è libero;*

(*b*) *se A è la matrice che ha sulle colonne (o sulle righe) le componenti dei vettori di S rispetto ad una prefissata base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$, risulta* $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione. L'insieme S è libero se, e solo se, $\varphi_{\mathcal{B}}(S)$ è un insieme libero di vettori di $\mathbb{K}^n$ (si provi questa asserzione per esercizio!) se, e solo se, $\det(A) \neq 0$. ∎

(1.8.3) Osservazione *Il Teorema* (1.8.2) *è una caratterizzazione per insiemi S liberi (con $|S| = n$) in uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$. Pertanto abbiamo anche che S è legato se, e solo se,* $\det(A) = 0$*, essendo A la matrice che ha sulle colonne (o sulle righe) le componenti dei vettori di S rispetto ad una prefissata base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$.*

E' importante notare fin da ora che è possibile e, vedremo presto, operativamente molto utile, identificare le n-uple ordinate di $\mathbb{K}^n$, componenti dei vettori di $V_n(\mathbb{K})$ rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$, con matrici-colonna (vettori-colonna) di $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$: ciò è reso possibile dal fatto che, in tale identificazione, le operazioni vettoriali di addizione e moltiplicazione per scalari vengono conservate, esattamente come abbiamo notato per la $\varphi_{\mathcal{B}}$ nell'osservazione (1.8.1).

(1.8.4) Esempio *Si consideri in $\mathbb{R}^4$ l'insieme*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Allora la matrice A che ha sulle colonne le componenti dei vettori di S rispetto *alla base canonica è data da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si può verificare che $\det(A) = 3 \neq 0$. *Allora* S *è libero, quindi è una base di* $\mathbb{R}^4$.

Sia ora $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ un sottoinsieme di $V_n(\mathbb{K})$ con $m \leq n$. Vogliamo anche in questo caso collegare la lineare indipendenza o dipendenza dei vettori di S ai determinanti di opportune matrici.

(1.8.5) Definizione *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$. *Chiamiamo* **minore di ordine** p *una matrice quadrata di ordine* p *ottenuta da* A *sopprimendo* $(n - p)$ *righe ed* $(m - p)$ *colonne (dove* $p \leq \min\{n, m\}$*).*
Un minore si dice **singolare** *se il suo determinante è zero.*

(1.8.6) Esempio *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$ *la matrice data da*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I minori di ordine uno corrispondono a ciascun elemento a_{ij} *della matrice* A. *I minori di ordine due si ottengono dalla matrice* A *sopprimendo una colonna:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che l'ultimo minore è singolare.

Attenzione però: per ottenere i minori di ordine dato di una matrice è necessario rispettare rigorosamente la definizione; per esempio, facendo sempre riferimanto alla matrice A del precedente esempio, la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che si può estrarre da A non è un minore di A, in quanto è stata ottenuta sopprimendo due termini, rispettivamente dalla prima e dalla seconda riga di A, che però non appartengono alla stessa colonna.

(1.8.7) Teorema *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e* $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subseteq V$ *un insieme di* m *vettori con* $m \leq n$. *Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *l'insieme* S *è libero;*

(b) *nella matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ *che ha per colonne (o per righe) le componenti dei vettori di* S *rispetto ad una prefissata base di* $V_n(\mathbb{K})$, *esiste un minore di ordine* m *non singolare.*

La dimostrazione di questo teorema viene proposta come esercizio (attenzione: non facile!).
Il teorema precedente può essere formulato in modo equivalente mediante il seguente

(1.8.8) Teorema *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e* $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subseteq V$ *un insieme di* m *vettori con* $m \leq n$. *Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *l'insieme* S *è legato;*

(b) *nella matrice* $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ *che ha per colonne (o per righe) le componenti dei vettori di* S *rispetto ad una prefissata base di* $V_n(\mathbb{K})$, *tutti i minori di ordine* m *sono singolari.*

(1.8.9) Osservazione *Il Teorema* (1.8.2) *è un caso particolare del Teorema* (1.8.7) *quando* $m = n = \dim(V_n(\mathbb{K}))$.

(1.8.10) Esercizio *In* $\mathbb{R}^4$ *si consideri l'insieme*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si chiede di stabilire se l'insieme S sia libero oppure legato.

Soluzione. Consideriamo la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{4,3}(\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo studiare i minori del terzo ordine:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(M_1) = 3\,,$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(M_2) = 4\,,$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(M_3) = -2\,,$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(M_4) = -4\,,$$

pertanto l'insieme S è libero (in realtà bastava considerare uno solo dei minori, una volta verificato che era non singolare). ♣

Vediamo ora come si possono unificare e meglio inquadrare tutte queste nozioni con il concetto di *rango* di una matrice. Se $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ possiamo rigurdare le colonne di A come vettori di $\mathbb{K}^n$ e le righe di A come vettori di $\mathbb{K}^m$.

(1.8.11) Definizione *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$. Chiamiamo* **rango per righe** *di A il massimo numero di righe linearmente indipendenti.*
Chiamiamo **rango per colonne** *di A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.*

(1.8.12) Proposizione *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$. Allora il rango per righe di A coincide con il rango per colonne di A ed è uguale al massimo ordine di un minore non singolare della matrice A.*

Dimostrazione. É una conseguenza del Teorema (1.8.7). ∎

(1.8.13) Definizione *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$. *Chiamiamo* **rango** *di* A *(e lo indichiamo con* $\mathrm{rg}(A)$*) il massimo numero di linee (cioè di righe o colonne) linearmente indipendenti di* A.

Osserviamo che la seconda parte della proprosizione precedente si esplicita meglio dicendo che se $\mathrm{rg}(A) = p$, allora p è il massimo numero di righe (o di colonne) linearmente indipendenti, quindi esiste un minore di ordine p non singolare e sono singolari tutti i minori di ordine maggiore di p.

Vediamo ora alcune proprietà del rango di una matrice, che seguono direttamente dalla definizione.

(1.8.14) Proposizione *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$. *Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$;

(*b*) *se la matrice* A *è quadrata (cioè* $m = n$*) ed invertibile, risulta* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{-1}) = n$;

(*c*) *risulta* $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$;

(*d*) *si ha* $\mathrm{rg}(A) = 0$ *se, e solo se,* $A = 0_{\mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})}$.

Anche il seguente teorema è conseguenza immediata della definizione di rango e dell'osservazione (1.6.15) sulla dimensione di spazi (e sottospazi) vettoriali:

(1.8.15) Teorema *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale,* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ m *vettori (con* $m \in \mathbb{N}$ *qualsiasi) ed* $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ *la matrice che ha sulle colonne le componenti di* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ *rispetto ad una prefissata base di* $V_n(\mathbb{K})$. *Allora*

$$\mathrm{rg}(A) = \dim \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle \ .$$

In particolare, i vettori che intervengono nella determinazione del rango di A costituiscono una base per il sottospazio $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$.

Esercizi

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i seguenti insiemi di vettori:

$$A = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,-1,2)\} \ ,$$

$$B = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,-1,2), \boldsymbol{v}_3 = (2,5,-2)\} \ ,$$

$$C = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,-1,2), \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)\} \ ,$$

$$D = \{\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,-1,2), \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1), \boldsymbol{v}_4 = (3,2,3)\} \ .$$

Per ognuno di essi si risponda ai seguenti quesiti:

(a) sono linearmente indipendenti?

(b) sono generatori di $\mathbb{R}^3$?

(c) sono una base di $\mathbb{R}^3$?

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ verificare che i tre vettori $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,2,3)$ cosituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare quindi le componenti dei vettori $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$ ed $\boldsymbol{w} = (1,1,1)$ rispetto a tale base.

3. Verificare che i polinomi

$$p_1(x) = 1 - x^2\,, \quad p_2(x) = x\,, \quad p_3(x) = x^2 + x + 1$$

costituiscono una base per $\mathbb{R}_2[x]$ e detrminare quindi le componenti del polinomio

$$p(x) = 2x^2 + x + 2$$

rispetto a tale base.

4. Sia $a \in \mathbb{R}$. In $\mathbb{R}_2[x]$ si consideri il sottospazio vettoriale

$$W_a = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(a) = 0\} \ .$$

Si dimostri che $\dim(W_a) = 2$ e determinare una base per W_a.

5. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9 Cambiamento di base

Sia $V = V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Vogliamo ora rispondere al secondo dei due quesiti di pagina 29: *come variano le componenti di un generico vettore $\boldsymbol{v} \in V$ al variare della base fissata in V?*

Siano $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ due basi di V. Il generico vettore $\boldsymbol{v} \in V$ avrà due rappresentazioni:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\,, \qquad \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}) = (x_1, \ldots, x_n)\,,$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{e}'_j\,, \qquad \varphi_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{v}) = (x'_1, \ldots, x'_n)\,.$$

A loro volta, anche i vettori $\boldsymbol{e}'_j$ (per $j = 1, \ldots, n$) si rappresentano come combinazioni lineari dei vettori della base $\mathcal{B}$ nel seguente modo:

$$\text{(1.9.1)} \qquad \forall j = 1, \ldots, n: \quad \boldsymbol{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_i\,.$$

Ricordando ora la proprietà commutativa, associativa e distributiva, otteniamo:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\,.$$

Uguagliando termine a termine i coefficienti di $\boldsymbol{e}_i$, abbiamo:

$$\text{(1.9.2)} \qquad \forall i = 1, \ldots, n: \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j\,.$$

La relazione precedente esprime il legame cercato. Proviamo ora a scrivere tale legame utilizzando le matrici. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})\,.$$

Risulta che A è invertibile perchè $\det(A) \neq 0$ per il Teorema (1.8.7). La matrice A si chiama *matrice del cambiamento di base da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$. Notiamo che la j-esima colonna di A

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

è costituita proprio dalle componenti del j-esimo vettore $\boldsymbol{e}'_j$ della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (vedi relazione (1.9.1)).
Ponendo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

la (1.9.2) si può scrivere

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'\,, \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{x}' = A^{-1}\boldsymbol{x}\,.$$

Esercizi

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ la base canonica $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ e la base $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$. Determinare la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ e la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ si considerino i vettori $\boldsymbol{v}_1 = (i, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (3i, 2)$. Provare che essi cosituiscono una base di $\mathbb{C}^2$ e determinare i cambiamenti di coordinate nel passaggio dalla base canonica a questa nuova base.

3. Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tre basi per $V(\mathbb{K})$. Siano B la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ e C la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{C}$. Si dimostri che $B^{-1}C$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Capitolo 2

Sistemi lineari

Come sempre, nel corso del seguente Capitolo, $\mathbb{K}$ denoterà un generico campo.

1 Sistemi lineari a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari in n incognite, sul campo $\mathbb{K}$.
Scriviamo

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \, , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \, , \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \, , \end{array} \right. \tag{2.1.1}
$$

per indicare il **sistema lineare**, con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathbb{K}$ per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Le $x_1, \ldots, x_n$ sono le **incognite**, o **indeterminate**, del sistema, gli a_{ij} sono i **coefficienti delle incognite** e i $b_1, \ldots, b_m$ sono i **termini noti** del sistema. Una **soluzione del sistema** è una n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ che, sostituita alla n-upla delle incognite $(x_1, \ldots, x_n)$, soddisfi a tutte le equazioni del sistema stesso.
La rappresentazione matriciale del sistema (2.1.1) è data da

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \, , \tag{2.1.2}
$$

con $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .
$$

Chiamiamo la matrice A, **matrice dei coefficienti**, la matrice $\boldsymbol{x}$, **matrice**, o **vettore-colonna, delle incognite** e infine chiamiamo la matrice $\boldsymbol{b}$, **matrice** (o **vettore-colonna) dei termini noti**.
La matrice

$$[A|\boldsymbol{b}] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m,n+1}(\mathbb{K}),$$

viene chiamata *matrice completa* del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(2.1.3) Definizione *Un sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si dice* **omogeneo** *se $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, cioè quando le equazioni che lo compongono sono tutte (lineari ed) omogenee. In tal caso avremo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

Vediamo ora un'altra rappresentazione matriciale di un sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Indichiamo con

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

le n colonne della matrice A. Una scrittura equivalente al sistema dato è quindi:

(2.1.4) $$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = \boldsymbol{b}\,.$$

Risolvere il sistema (2.1.1) o, equivalentemente, (2.1.2) o (2.1.4), significa trovare delle n-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ che, sostituite alle incognite $x_1, \ldots, x_n$, soddisfano a tutte le equazioni del sistema.
Riguardando alla scrittura (2.1.4), osserviamo che $A_1, \ldots, A_n, \boldsymbol{b} \in \mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{K})$, cioè sono vettori dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{K})$ delle matrici-colonna, o vettori-colonna di ordine m sul campo $\mathbb{K}$ (che, ricordiamo, si può identificare con lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^m$ delle m-uple ordinate di elementi di $\mathbb{K}$).
Dunque, risolvere il sistema (2.1.1) equivale ad esprimere il vettore $\boldsymbol{b}$ come combinazione lineare delle colonne $A_1, \ldots, A_n$ della matrice A.

(2.1.5) Definizione *Un sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si dice* **risolubile** *(o* **compatibile***) quando ammette soluzioni, cioè quando esiste almeno una n-upla $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, ovvero $A_1\alpha_1 + \ldots + A_n\alpha_n = \boldsymbol{b}$.*

(2.1.6) Osservazione *Un sistema lineare omogeneo è sempre risolubile: infatti esiste la n-upla* $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *(detta* soluzione banale*) che soddisfa a tutte le equazioni del sistema:* $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *, ovvero* $A_1 0 + \ldots + A_n 0 = \mathbf{0}$.

2 Risolubilità di un sistema

(2.2.1) Teorema (di Rouchè - Capelli) *Un sistema lineare* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*, di m equazioni in n incognite, è risolubile se e solo se* $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}([A|\boldsymbol{b}])$.

Dimostrazione. Facciamo qualche considerazione preliminare. Riguardando le colonne delle matrici A ed $[A|\boldsymbol{b}]$ come vettori di $\mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{K})$, possiamo confrontare i sottospazi di $\mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{K})$ generati dalle colonne di ciscuna delle due matrici. Risulta

$$\langle A_1, \ldots, A_n \rangle \leq \langle A_1, \ldots, A_n, \boldsymbol{b} \rangle \ ,$$

dunque

$$\dim \langle A_1, \ldots, A_n \rangle \leq \dim \langle A_1, \ldots, A_n, \boldsymbol{b} \rangle \ .$$

Ma, per definizione di rango:

$$\operatorname{rg}(A) = \dim \langle A_1, \ldots, A_n \rangle \ , \qquad \operatorname{rg}[A|\boldsymbol{b}] = \dim \langle A_1, \ldots, A_n, \boldsymbol{b} \rangle \ .$$

Allora $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}[A|\boldsymbol{b}]$ in generale.
Ora siamo pronti per dimostrare il teorema. Il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è risolubile se e solo se il vettore $\boldsymbol{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A. Ciò risulta essere vero se e solo se $\boldsymbol{b} \in \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$, ovvero $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle = \langle A_1, \ldots, A_n, \boldsymbol{b} \rangle$. L'ultima uguaglianza equivale ad affermare che $\dim \langle A_1, \ldots, A_n \rangle = \dim \langle A_1, \ldots, A_n, \boldsymbol{b} \rangle$, da cui $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}[A|\boldsymbol{b}]$. ■

(2.2.2) Esempio *Si consideri il sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0\,, \\ x - y - z = 0\,. \end{cases}$$

In questo caso abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Si verifica che $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}] = \mathrm{rg}(A) = 2$*, pertanto il sistema dato è risolubile (come abbiamo già aosservato, un sistema lineare è sempre risolubile!).*

(2.2.3) Esempio *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1\,, \\ 2x + 2y + 2z = 1\,. \end{cases}$$

Ora abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si vede facilmente che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}] = 2$*, pertanto il sistema dato è risolubile.*

(2.2.4) Esempio *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + y - z = 0\,, \\ 3x + 2y + z = 2\,, \\ 2x + y + 2z = 1\,. \end{cases}$$

Tale sistema non è risolubile. Infatti, posto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

si ha $\det(A) = 0$*, pertanto* $\mathrm{rg}(A) \leq 2$*, mentre si verifica facilmente che* $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}] = 3$*.*

(2.2.5) Esempio *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + y = 1\,, \\ x - y + z = 0\,, \\ 3x - y + 2z = 1\,. \end{cases}$$

Risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Si verifica che $\det(A) = 0$ *e* $\mathrm{rg}(A) = 2$*, mentre* $\mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}] = 3$*, pertanto il sistema non è risolubile.*

Esercizi

1. Si studi (cioè si veda se ha soluzioni, ed in tal caso le si trovino) il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1\,, \\ x - y + 4z = 7\,, \\ x - 2y + 2x = 3\,. \end{cases}$$

2. Studiare i seguenti sistemi al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 2x + ky = 2\,, \\ kx + 2y = k\,, \\ ky + kz = k\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + kz = 11\,, \\ 2x - 6y - 3z = 0\,, \\ kx + 4y + 2z = 7\,. \end{cases}$$

3. Si trovi una relazione tra $a, b, c, \in \mathbb{R}$ perchè il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = a\,, \\ 2x + z = b\,, \\ 4x + 7y + z = c\,, \end{cases}$$

ammetta soluzione.

4. Siano $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti in $\mathbb{K}$ in n incognite ed m equazioni ed $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni del sistema dato. Si dimostri che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

3 Determinazione delle soluzioni di un sistema

Sia dato il sistema

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \qquad \text{con } A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})\,,$$

di m equazioni ed n incognite, con $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}]$, cioè compatibile.

(2.3.1) Definizione *Dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, chiamiamo* **sistema lineare omogeneo associato** *ad $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.*

(2.3.2) Teorema *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineare risolubile. Allora tutte e sole le soluzioni del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sono del tipo*

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w} \qquad (\text{con } \overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n \cong \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K}))$$

con $\boldsymbol{x}_0$ soluzione particolare di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{w}$ soluzione del sistema omogeneo associato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Dimostrazione. Sia $\overline{\boldsymbol{x}}$ una soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, cioè $A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$. Per ipotesi, risulta $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$, da cui $A\overline{\boldsymbol{x}} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. Segue che $(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_0)$ è soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ponendo $\boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_0$, abbiamo $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}$.
Siano viceversa $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w} \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$ tali che $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ e $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$. Allora

$$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}\,.$$

Segue che $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}$ è soluzione del sistema. ∎

Se indichiamo con

$$\overline{X} = \{\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K}) :\ A\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}\}\ ,$$

l'insieme delle soluzioni del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, e con

$$W = \{\boldsymbol{w} \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K}) :\ A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\}\ ,$$

l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato, possiamo scrivere $\overline{X} = \boldsymbol{x}_0 + W$.
Ci chiediamo ora 'quante' siano le soluzioni del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ove il senso del termine 'quante' verrà chiarito ora.
Fissata che sia una soluzione particolare $\boldsymbol{x}_0$, abbiamo appena visto che tutte le soluzioni si determinano ponendo

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\,,$$

al variare di $\boldsymbol{w} \in W$. La chiave del problema è allora questo insieme $W \subseteq \mathbb{K}^n$ (identificato con $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$). Risulta che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Infatti, $\boldsymbol{0} \in W$, pertanto $W \neq \emptyset$. Siano ora $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Allora

$$A(\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2) = \alpha_1 A\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}\,.$$

Inoltre si può dimostrare che $\dim W = n - \mathrm{rg}(A)$. Allora, se poniamo

$$r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}]\,,$$

risulta $\dim(W) = n - r$.
Sia $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r})$ una base di W: ogni vettore $\boldsymbol{w} \in W$ si ottiene come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \boldsymbol{e}_i\,,$$

al variare degli $n-r$ parametri liberi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{K}$. Dunque tutte e sole le soluzioni del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sono del tipo

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \underbrace{\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{e}_{n-r}}_{\boldsymbol{w} \in W} .$$

Ciò equivale a dire che le soluzioni del sistema dipendono da $n-r$ parametri, il che si esprime convenzionalmente con l'espressione *il sistema ammette* ∞^{n-r} *soluzioni.*

In questo senso, abbiamo chiarito che cosa si intende per determinare 'quante' soluzioni ha il sistema[1].

Si noti che se, in particolare, risulta $r = n$, la soluzione del sistema è unica ed è data da $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0$ (cioè dipendente da 0 parametri), e la scrittura ∞^0 assume il significato di 1.

(2.3.3) Esempio *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2\,, \\ x - y = 1\,. \end{cases}$$

Abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Risulta che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}] = 2$*, pertanto il sistema è compatibile. Inoltre* $n - r = 1$*. Allora il sistema ha* ∞^1 *soluzioni, cioè ha soluzioni che dipendono da un parametro. Una soluzione particolare del sistema è data da*

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

come si ottiene subito ponendo $x = 0$ *e ricavando i corrispondenti valori di* y *e* z *dalle due equazioni del sistema, mentre le soluzioni del sistema omogeneo associato*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0\,, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

sono della forma

$$\boldsymbol{w} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

[1] se, in particolare, il campo $\mathbb{K}$ ha cardinalità finita q, il sistema ha un numero finito di soluzioni, pari a q^{n-r}.

Pertanto le soluzioni del sistema dato (scritte come vettori-colonna) sono della forma

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, cioè

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

(2.3.4) Esempio *Si consideri il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + y + z = 1\,, \\ x - y = 2\,, \\ y - z = 0\,. \end{cases}$$

Abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Si verifica facilmente che $\det(A) \neq 0$ *e* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}[A|\boldsymbol{b}] = 3$. *Segue che il sistema dato ammette una sola soluzione. Infatti* $n - \mathrm{rg}(A) = 3 - 3 = 0$.

4 Sistemi quadrati

Vediamo ora un caso particolare di sistemi lineari: i sistemi quadrati. Se in un sistema il numero delle equazioni m è uguale al numero delle incognite n, ossia $m = n$, possiamo considerare il seguente teorema, che prende il nome dal matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752), che ci fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e unicità della soluzione del sistema, nonchè un'espressione diretta della soluzione stessa, in caso di risolubilità:

(2.4.1) Teorema (di Cramer) *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineare in n equazioni ed n incognite. Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) *il sistema ha una ed una sola soluzione;*

(b) $\det(A) \neq 0$.

Inoltre, se $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ *è la soluzione del sistema dato, la sua i-esima componente è data da:*

$$\overline{x}_i = \frac{\det[A_1\, A_2\, \ldots\, A_{i-1} | \boldsymbol{b}\, A_{i+1}\, \ldots\, A_n]}{\det(A)},$$

dove

$$[A_1\, A_2\, \ldots\, A_{i-1} | \boldsymbol{b}\, A_{i+1}\, \ldots\, A_n]$$

è la matrice ottenuta da A *lasciando invariate le colonne* $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ *e sostituendo la colonna* A_i *con la colonna* $\boldsymbol{b}$ *dei termini noti.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare l'equivalenza di (a) e (b). A questo scopo è sufficiente osservare, in base alle considerazioni del precedente paragrafo, che il sistema ha una sola soluzione se e solo se $n = r$, dove r è il rango della matrice A dei coefficienti delle incognite. ■

5 Sistemi lineari omogenei

Consideriamo il sistema lineare omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Per il Teorema di Rouchè-Capelli il sistema è sempre risolubile, infatti ammette sempre la soluzione banale. In molti problemi saremo interessati all'esistenza di soluzioni non banali di un sistema lineare omogeneo. Questo giustifica la seguente

(2.5.1) Definizione *Chiamiamo* **autosoluzione** *di un sistema lineare omogeneo una soluzione non banale (se esiste).*

Vediamo ora due proprietà che esprimono condizioni per l'esistenza di autosoluzioni.

(2.5.2) Proposizione *Sia* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *un sistema lineare omogeneo di* **m** *equazioni in* **n** *incognite. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *il sistema possiede autosoluzioni;*

(b) $\mathrm{rg}(A) < n$.

Dimostrazione. Il sistema ammette autosoluzioni se, e solo se, $W \neq \{\mathbf{0}\}$. Ciò risulta essere vero se e solo se $\dim(W) > 0$ il che equivale ad affermare che $\mathrm{rg}(A) = n - \dim(W) < n$, da cui la tesi. ∎

(2.5.3) Proposizione *Sia $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di $\mathbf{n}$ equazioni in $\mathbf{n}$ incognite. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *il sistema possiede autosoluzioni;*

(a) $\det(A) = 0$.

Dimostrazione. É una conseguenza immediata del Teorema di Cramer. ∎

(2.5.4) Teorema (regola dei minori) *Sia $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di $n-1$ equazioni in n incognite e sia $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Allora la generica soluzione è data da:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ -\Gamma_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}\Gamma_n \end{bmatrix},$$

dove $k \in \mathbb{K}$ e Γ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sopprimendo la i-esima colonna.

(2.5.5) Esempio *Si consideri il sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0\,, \\ 3x - y - t = 0\,, \\ -x + z + 2t = 0\,. \end{cases}$$

Applicando la regola dei minori, otteniamo:

$$x = k\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -2k\,, \qquad y = k\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -9k\,,$$

$$z = k\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -8k\,, \qquad t = k\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3k\,.$$

Pertanto risulta che le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizi

1. Si risolva il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} -3x + z = 0\,, \\ 4x + y = 0\,, \\ x + y + z = 0\,. \end{cases}$$

2. Si determinino i valori del parametro reale t per i quali il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\,, \\ 2x_1 - x_2 + (t+1)x_4 = 0\,, \\ x_1 + (6-t)x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0\,, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + t^2 x_4 = 0 \end{cases}$$

ammette autosoluzioni. Per tali valori di t si determini una base dello spazio vettoriale delle soluzioni.

6 Equivalenza di sistemi lineari ed eliminazione di Gauss

6.1 Equivalenza di sistemi lineari

(2.6.1) Definizione *Due sistemi lineari (a coefficienti in uno stesso campo $\mathbb{K}$) con lo stesso numero di incognite si dicono* **equivalenti** *quando hanno esattamente le stesse soluzioni.*

Chiaramente, due sistemi ottenuti l'uno dall'altro semplicemente cambiando l'ordine delle equazioni sono equivalenti.

(2.6.2) Definizione *Siano*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a\,, \qquad b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = b$$

due equazioni. Chiamiamo **combinazione lineare delle due equazioni** *a coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ l'equazione*

$$\alpha(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + \beta(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n) = \alpha a + \beta b\,.$$

I coefficienti di questa nuova equazione sono $\alpha a_i + \beta b_i$ per $i = 1, \ldots, n$.

Vediamo ora che facendo combinazioni lineari di equazioni di un sistema le soluzioni non cambiano.

(2.6.3) Teorema *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineare a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ con $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Sia $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ il sistema lineare ottenuto dal precedente sostituendo in $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ l'equazione*

$$\alpha(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) + \beta(a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n) = \alpha b_i + \beta b_j$$

al posto dell'equazione

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j\,,$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\beta \neq 0$. Allora i due sistemi lineari $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ sono equivalenti.

Dimostrazione. Sia $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ una soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Allora $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ soddisfano a tutte le equazioni e in particolare

$$\begin{cases} a_{i1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n = b_i\,, \\ a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j\,. \end{cases}$$

Segue che

$$\alpha(a_{i1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n) + \beta(a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n) = \alpha b_i + \beta b_j\,,$$

pertanto $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ è soluzione di $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.
Viceversa, sia $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ soluzione di $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$. Allora

$$\begin{cases} \alpha(a_{i1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n) + \beta(a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n) = \alpha b_i + \beta b_j\,, \\ a_{i1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{in}\overline{x}_n = b_i\,. \end{cases}$$

Sostituendo allora il valore b_i nel primo membro della prima equazione e ricordando che $\beta \neq 0$, segue che $a_{j1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{jn}\overline{x}_n = b_j$ e pertanto $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ è soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. ■

(2.6.4) Corollario *Un sistema lineare* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *(con* $A \in \mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbb{K})$ *e* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$*) è equivalente ad un sistema* $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ *(con* $A' \in \mathrm{Mat}_{p+h,n}(\mathbb{K})$ *e* $\boldsymbol{b}' \in \mathbb{K}^{p+h}$*) ottenuto aggiungendo alle equazioni del sistema iniziale* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *altre* h *equazioni che siano combinazioni lineari di equazioni del sistema stesso.*

6.2 Il metodo di eliminazione di Gauss

Abbiamo appena visto che possiamo effettuare su un sistema lineare due operazioni elementari che non ne modificano le soluzioni (cioè che lo trasformano in un sistema equivalente) e precisamente:

(1) scambiare due equazioni;

(2) sostituire un'equazione con una sua combinazione lineare con un'altra equazione (in cui sia non nullo il coefficiente dell'equazione da sostituire).

Corrispondentemente, sulla matrice (completa) associata al sistema vengono effettuate le seguenti due operazioni:

(1′) scambiare due righe;

(2′) sostituire una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga (in cui sia non nullo il coefficiente della riga da sostituire).

Il **metodo di eliminazione di Gauss**, che prende il nome dal matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1875), è una procedura che trasforma, mediante operazioni elementari di tipo (1) e (2) un qualunque sistema lineare in un sistema equivalente.
L'algoritmo stesso, attraverso l'applicazione delle operazioni elementari di tipo (1′) e (2′), dette *mosse di Gauss*, riduce la matrice completa del sistema in una forma detta *a scalini*. Ciò permette il calcolo agevole del rango della matrice (che sarà

pari al numero di scalini/pivot) nonché la risoluzione del sistema lineare ad essa associato.

Un'estensione di tale metodo, nota come metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, dal matematico tedesco Wilhelm Jordan (1842-1899), riduce ulteriormente la matrice, permettendo di calcolarne anche l'inversa.

Nonostante sia attribuito a Gauss e Jordan, il primo matematico ad aver usato questo algoritmo è stato Liu Hui nel 263 a.C..

6.3 A. Riduzione di un sistema quadrato ad un sistema triangolare superiore

Cominciamo con il considerare il caso di un *sistema quadrato*, cioè con tante equazioni quante incognite.

(2.6.5) Definizione *Un sistema lineare quadrato si dice* **triangolare superiore** *se la sua matrice dei coefficienti è triangolare superiore.*

(2.6.6) Proposizione *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineare triangolare superiore di n equazioni in n incognite. Allora tale sistema ammette una ed una sola soluzione se, e solo se, tutti gli elementi della diagonale principale della matrice A dei coefficienti sono diversi da zero.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Cramer, il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ammette una ed una sola soluzione se, e solo se, $\det(A) \neq 0$. Ricordando ora che, per una matrice triangolare, $\det(A)$ coincide con il prodotto degli elementi della diagonale principale, segue immediatamente la tesi. ■

In questo caso (cioè quando $\det(A) \neq 0$) come si calcola, effettivamente, la soluzione? L'ultima equazione del sistema triangolare superiore $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è

$$a_{nn}x_n = b_n\,, \qquad \text{con } a_{nn} \neq 0\,.$$

Allora $\overline{x}_n = b_n/a_{nn}$. Sostituendo $\overline{x}_n$ nella penultima equazione, otteniamo:

$$a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} = \underbrace{b_{n-1} - a_{(n-1)n}\overline{x}_n}_{c_{n-1}}\,, \qquad \text{con } a_{(n-1)(n-1)} \neq 0\,.$$

Allora $\overline{x}_{n-1} = c_{n-1}/a_{(n-1)(n-1)}$. Procedendo in questo arriviamo alla prima equazione che è diventata

$$a_{11}x_1 = c_1\,, \qquad \text{con } a_{11} \neq 0\,.$$

Allora $\overline{x}_1 = c_1/a_{11}$.
L'algoritmo qui illustrato si chiama *risoluzione all'indietro di un sistema triangolare superiore.*

Vediamo ora com'è la procedura di riduzione di un sistema quadrato ad uno equivalente triangolare superiore col *metodo di eliminazione di Gauss.* Prendiamo in esame un sistema lineare quadrato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- Consideriamo la prima colonna della matrice A: se contiene solo zeri, poniamo $p_1 = 0$ e consideriamo la seconda colonna di A; se contiene qualche elemento non nullo, scambiamo, se necessario, la prima equazione con una delle successive in modo che risulti $a_{11} \neq 0$. Poniamo $p_1 = a_{11}$ e sommiamo a ciscuna delle altre equazioni la prima equazione moltiplicata per $-a_{j1}/p_1$, per $j = 2, \ldots, n$. Otteniamo così un sistema equivalente $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$, in cui

$$A' = \left[\begin{array}{c|ccc} p_1 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right], \qquad \boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - a_{21}/p_1 \\ \vdots \\ b_n - a_{n1}/p_1 \end{bmatrix}.$$

- Al passo successivo si opera allo stesso modo sulla prima colonna della matrice B, producendo un secondo termine p_2 sulla diagonale principale, al di sotto del quale vi saranno tutti zeri.

- Infine otteniamo un sistema triangolare superiore equivalente al sistema dato.

(2.6.7) Definizione *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineare. Chiamiamo* **i-esimo pivot** *il termine p_i che compare sulla diagonale principale del sistema triangolare superiore equivalente al sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

(2.6.8) Esercizio *Si risolva il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1\,, \\ 3x + 9y + 4z + w = 1\,, \\ 2x + y + 5z + 2w = 0\,, \\ y - z - w = 2\,. \end{cases}$$

Soluzione. Anzitutto individuiamo la matrice dei coefficienti A ed il vettore $\boldsymbol{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})\,, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo di ottenere un sistema equivalente a quello dato in cui la matrice A' dei coefficienti sia triangolare superiore.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2/5 & -1/5 & 8/5 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/5 & 4/5 \end{array}\right].$$

Pertanto abbiamo $p_1 = 1$, $p_2 = -5$, $p_3 = 1$ e $p_4 = 7/5$. Il sistema equivalente $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ è dato da

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1\,, \\ -5y + 3z + 4w = -2\,, \\ z + 4w = -2\,, \\ 7/5w = 4/5\,. \end{cases}$$

Risolvendo all'indietro il precedente sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = 11\,, \\ y = -12/7\,, \\ z = -30/7\,, \\ w = 4/7\,. \end{cases}$$

♣

(2.6.9) Osservazione *Un sistema lineare quadrato ammette un'unica soluzione se, e solo se, i pivot della sua matrice dei coefficienti sono tutti non nulli.*

(2.6.10) Osservazione *I pivot di una matrice quadrata* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *non sono univocamente determinati (infatti essi cambiano se si effettuano degli scambi di riga).*

(2.6.11) Osservazione *I pivot di una matrice quadrata non sono completamente arbitrari. Infatti i pivot ottenuti con un'eliminazione di Gauss sono tutti non nulli se, e solo se, lo sono anche quelli ottenuti con un'altra eliminazione.*

(2.6.12) Osservazione *Il valore assoluto del prodotto di tutti i pivot è indipendente dall'eliminazione di Gauss effettuata: esso risulta infatti coincidere col valore assoluto del determinante della matrice* A*.*

Dimostrazione. Nell'eliminazione di Gauss si effettuano solo operazioni di tipo (a), che cambiano segno al determinante, e operazioni del tipo (c), che lasciano invariato $\det(A)$: si consulti la dispensa *Matrici*, pagina 21. ∎

6.4 B. Sistemi rettangolari: riduzione a scala

L'eliminazione di Gauss trasforma un sistema lineare quadrato in un sistema equivalente triangolare superiore, ovvero una matrice quadrata in una triangolare; vediamo ora che tipo di matrici si ottengono applicando lo stesso procedimento a matrici generiche, anche non quadrate.

(2.6.13) Definizione *Chiamiamo* **matrice a scalini***, o* **matrice a scala** *(su* *un campo $\mathbb{K}$) una matrice del tipo*

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_3 & \cdots & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & p_r & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix},$$

dove $*$ indica che ci può essere un qualunque elemento del campo $\mathbb{K}$. I numeri $p_i \in \mathbb{K}^*$ $(i = 1, \ldots, r)$ sono tutti non nulli e vengono detti i **pivot**[2] *della matrice a scala.*
Un **sistema a scala** *è un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è a scala.*

(2.6.14) Proposizione *Sia $S \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala con r pivot. Poniamo*

$$E_r = \left\{(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{K}^m : x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{K}\right\} =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\rangle \leq \mathbb{K}^m .$$

Indichiamo con $S^{(j_k)}$ la colonna di S in cui compare il k-esimo pivot p_k per $k = 1, \ldots, r$. Allora l'insieme generato dalle colonne di S coincide con E_r, $\mathrm{rg}(S) = r$ e l'insieme

$$\mathscr{S} = \left\{S^{(j_1)}, \ldots, S^{(j_r)}\right\}$$

è una base per E_r.

Dimostrazione. La dimostrazione consiste essenzialmente nel provare che gli elementi dell'insieme $\mathscr{S}$ sono linearmente indipendenti. Infatti, poichè le colonne

[2] Si osservi che i pivot qui definiti sono *tutti non nulli*, mentre nel caso precedentemente considerato delle matrici quadrate, il procedimento di eliminazione di Gauss si arrestava ad una triangolare superiore, con pivot *eventualmente nulli*.

di S sono tutte vettori di E_r, risulta che l'insieme generato dalle colonne di S è un sottospazio vettoriale di E_r. Pertanto, se l'insieme generato dalle colonne di S contiene r vettori linearmente indipendenti (le colonne $S^{(j_k)}$, per $k = 1, \ldots, r$) allora questi sono generatori e la dimensione dell' insieme generato dalle colonne di S è proprio r, da cui la tesi.
Verifichiamo quindi che l'insieme $\mathscr{S}$ è composto da vettori linearmente indipendenti. Il sistema

$$\alpha_1 S^{(j_1)} + \ldots + \alpha_r S^{(j_r)} = \mathbf{0}$$

ha come matrice dei coefficienti la matrice

$$A = \left[S^{(j_1)}\, S^{(j_2)}\, \ldots\, S^{(j_r)}\right] ,$$

cioè

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p_r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

Se si eliminano le ultime $m - r$ righe di zeri, ovvero le ultime $m - r$ equazioni del sistema, che sono identità, la matrice A si riduce ad una matrice quadrata A', che è la matrice dei coefficienti di un sistema triangolare superiore, con tutti i p_k diversi da zero sulla diagonale principale. Segue che $\det(A') \neq 0$. Poichè il sistema è omogeneo, esso ha solo la soluzione $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, r$, pertanto gli $S^{(j_k)}$ sono linearmente indipendenti. ■

(2.6.15) Corollario *Sia $S \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala di rango r. Allora il sistema $S\boldsymbol{x} = \mathbf{c}$ ha soluzioni se, e solo se, le ultime $m - r$ componenti di $\mathbf{c}$ sono nulle; lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ha dimensione $n - r$ (cioè le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri).*

Dimostrazione. Il sistema $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ha soluzioni se e solo se $\boldsymbol{c}$ appartiene all'insieme generato dalle colonne della matrice S, ossia $\boldsymbol{c} \in E_r$. Ciò equivale ad affermare che

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Inoltre, se indichiamo con W_S lo spazio delle soluzioni di $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, risulta

$$\dim(W_S) = n - \mathrm{rg}(S) = n - r ,$$

da cui la tesi. ■

(2.6.16) Esercizio *Si risolva il sistema lineare*

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 - 3x_6 = 1 , \\ \frac{1}{3}x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_5 - x_6 = 0 . \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che il sistema dato è un sistema a scala $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, con

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,6}(\mathbb{K}) .$$

La matrice S ha tre pivot, pertanto $\mathrm{rg}(S) = 3$, quindi il sistema ammette sempre soluzioni (che dipendono da tre parametri). Risulta

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 10x_4 + x_6 , \\ x_3 = 6 - 9x_4 , \\ x_5 = x_6 . \end{cases}$$

Segue che

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{W_S} .$$

Una base per W_S è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vediamo che la soluzione del sistema è della forma

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w} \,,$$

dove $\boldsymbol{x}_0$ è una soluzione particolare del sistema $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ mentre $\boldsymbol{w}$ è soluzione del sistema omogeneo $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Notiamo che gli $n - r$ (tre in questo caso) parametri da cui dipendono le soluzioni sono proprio le *variabili che non corrispondono ai pivot*, le cosiddette **variabili libere del sistema**. ♣

(2.6.17) Osservazione *La risoluzione all'indietro del precedente sistema fornisce direttamente le soluzioni nella forma*

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + x_{i_1}\boldsymbol{w}_1 + \ldots + x_{i_{n-r}}\boldsymbol{w}_{n-r} \,,$$

dove $\boldsymbol{x}_0$ è una soluzione particolare del sistema, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ sono le variabili libere e $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-r}$ formano una base di W_S.

Abbiamo fin qui esaminato le proprietà di un sistema a scala e dell'insieme delle sue soluzioni. Vediamo ora, tramite un esempio, come con il procedimento di eliminazione di Gauss, tramite le opportune operazioni elementari, si può trasformare una qualunque matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ in una matrice a scala $S \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$: ciò corrisponde a trasformare un qualunque sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in un sistema a scala $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ad esso equivalente (che si chiama la **riduzione a scala di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$**).

(2.6.18) Esempio *Si risolva il seguente sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (in particolare è quadrato)*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \,, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \,, \\ 3x_1 - 3x_3 = 2 \,, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \,. \end{cases}$$

Soluzione. Individuiamo la matrice dei coefficienti A e il vettore dei termini noti $\boldsymbol{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala la matrice A abbiamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Poniamo

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice S possiede $r = 3$ pivot, le incognite sono $n = 4$. Allora $\dim(W_S) = 1$ e $\mathrm{rg}(S) = 3$. L'ultima componente di $\boldsymbol{c}$ è $c_4 = -1 \neq 0$ mentre

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

per cui $\boldsymbol{c} \notin E_3$ e ciò significa che il sistema è incompatibile. Del resto, l'ultima equazione di $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, guardata direttamente, ci fornisce $0 = -1$ che è impossibile. Per concludere che il sistema è incompatibile è sufficiente anche osservare che, poichè la matrice completa ha rango 4, mentre quella dei coefficienti ha rango 3, il sistema non ammette soluzioni a norma del Teorema di Rouchè - Capelli. ♣

Possiamo raccogliere le precedenti considerazioni enunciando il seguente

(2.6.19) Teorema *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema lineare e $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ una sua riduzione a scala. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(*a*) *i due sistemi sono equivalenti;*

(*b*) *i rispettivi sistemi omogenei associati $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ e $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ sono equivalenti;*

(*c*) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S)$.

Inoltre, se $S^{(j_1)}, \ldots, S^{(j_r)}$ $(r = \mathrm{rg}(S))$ *sono le colonne corrispondenti ai pivot di* S*, allora* $\{A^{(j_1)}, \ldots, A^{(j_r)}\}$ *costituisce una base per lo spazio delle colonne della matrice* A*.*

(2.6.20) Osservazione *I pivot di una matrice non sono univocamente determinati: essi dipendono dalla riduzione a scala. Il numero dei pivot non dipende invece dalle scelte effettuate: essi infatti eguagliano il rango della matrice.*

Esercizi

1. Si studi al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1\,, \\ 2x_1 + kx_2 + 8x_3 = -1\,, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = h\,. \end{cases}$$

2. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ affinchè il seguente sistema lineare sia compatibile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (2k-1)x_3 = 8\,, \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 1\,, \\ kx_1 + (k-2)x_2 + 2(4-3k)x_3 = 3k - 26\,, \\ 2x_1 + (k-1)x_2 + (5-2k)x_3 = 3k - 11\,. \end{cases}$$

3. Si consideri il seguente sistema lineare al variare di $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a_1\,, \\ -x_1 + 5x_3 = a_2\,, \\ -x_1 - 5x_2 = a_3\,. \end{cases}$$

Si dimostri che l'insieme V dei vettori $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ tali per cui il sistema è compatibile è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Si richiede inoltre di calcolare $\dim(V)$ e di trovare una base per V. Infine, per ogni $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ per cui il sistema assegnato è compatibile, si trovino quante sono le soluzioni.

4. Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per iquali il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ abbia soluzione, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5. Si stabilisca il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ tra

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1\,, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3\,, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4\,, \quad \boldsymbol{w}_4 = 4\boldsymbol{v}_1+4\boldsymbol{v}_2+4\boldsymbol{v}_3+2\boldsymbol{v}_4\,,$$

essendo $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ una base di $\mathbb{R}^4$.

6. Si risolva il seguente sistema lineare in $\mathbb{Z}_{13}$:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 1\,, \\ 7x + 3y = 8\,. \end{cases}$$

7. Discutere la risolubilità dei seguenti sistemi lineari, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - hy = 1\,, \\ 4x + hy = 0\,, \\ 2x + 3y = -2h\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} hx + y + 3z = 3\,, \\ x - z = 2\,, \\ 2x + hy + 2z = h\,. \end{cases}$$

8. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0\,, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0\,, \end{cases}$$

e si determini $t \in \mathbb{R}$ in modo che tutte le soluzioni del sistema soddisfino l'equazione

$$tx + z = 0\,.$$

Capitolo 3

Applicazioni lineari o omomorfismi

Ora riprendiamo l'analisi degli spazi vettoriali $V(\mathbb{K})$ su un generico campo $\mathbb{K}$, per studiarne le leggi di trasformazione applicando le proprietà e le tecniche apprese nei precedenti capitoli.

1 Omomorfismi: definizione e prime proprietà

Abbiamo già avuto occasione di utilizzare funzioni notevoli defite tra spazi vettoriali: ricordiamo la bijezione $\varphi_{\mathcal{B}}$ definita nell'osservazione (1.6.9) del Capitolo 1, che permette di identificare $V_n(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}^n$, associando ad ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V_n(\mathbb{K})$ la n-upla ordinata dei coefficienti della combinazione lineare che esprime $\boldsymbol{v}$ rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$. Ricordiamo anche l'identificazione che abbiamo operato, a partire dal paragrafo 7 del Capitolo 1, tra le n-uple di $\mathbb{K}^n$ e i vettori-colonna, o matrici-colonna, di $Mat_{m,1}(\mathbb{K})$, che ha reso più agile la rappresentazione dei vettori in componenti e i calcoli ad essi relativi, svolti con l'uso delle matrici.

Facciamo notare che in entrambi i casi abbiamo a buon titolo parlato di 'identificazione' non solo per la bijettività della funzione che vi era coinvolta ma anche per la sua proprietà di mantenere inalterati, nel passaggio da uno spazio vettoriale all'altro, gli effetti delle operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per scalari.

Sono proprio queste proprietà che caratterizzano le particolari (e fondamentali) applicazioni tra spazi vettoriali che ora definiremo:

(3.1.1) Definizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali su un medesimo campo* $\mathbb{K}$ *e sia* $T : V \to V'$ *una funzione. Diciamo che* T *è un'***applicazione lineare** *o* **omomorfismo** *di* $V(\mathbb{K})$ *in* $V'(\mathbb{K})$ *se*

(a) T *conserva la somma di vettori, ossia*

$$\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V : \quad T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2)\,,$$

(b) T *conserva il prodotto tra uno scalare ed un vettore, ossia*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{v} \in V : \quad T(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})\,.$$

Combinando le proprietà (a) e (b) della precedente definizione, si può subito fare la seguente

(3.1.2) Osservazione *Un'applicazione* $T : V(\mathbb{K}) \to V'(\mathbb{K})$ *è lineare se, e solo se,* $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $T(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) = \alpha T(\boldsymbol{v}) + \beta T(\boldsymbol{w})$, *ovvero* T *conserva le combinazioni lineari.*

Esaminiamo subito alcuni esempi e controesempi che ci chiariscono meglio il concetto di applicazione lineare.

(3.1.3) Esempio *La seguente applicazione è lineare:*

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y\,. \end{cases}$$

Infatti, presi comunque due vettori (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *in* $\mathbb{R}^2$, *si ha* $T\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 + y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2 + y_2)$. *Inoltre, se* α *è uno scalare e* (x, y) *un vettore di* $\mathbb{R}^2$, *si ha* $T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = \alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) = \alpha T(x, y)$.

(3.1.4) Esempio *Siano* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali. Allora l'applicazione identica*

$$\mathrm{Id}_V : \begin{cases} V & \longrightarrow & V \\ \boldsymbol{v} & \longmapsto & \boldsymbol{v}\,, \end{cases}$$

e l'applicazione identicamente nulla

$$O : \begin{cases} V & \longrightarrow & V' \\ \boldsymbol{v} & \longmapsto & \mathbf{0}\,, \end{cases}$$

sono applicazioni lineari che vengono dette rispettivamente **omomorfismo identico** *e* **0-omomorfismo***.*

(3.1.5) Esempio *L'applicazione*

$$S : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 3, y)\,, \end{cases}$$

non è lineare: si verifica subito infatti che in questo caso non viene conservata nè la somma di vettori nè il prodotto scalare-vettore.

(3.1.6) Esempio *Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n e sia*

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

una base ordinata di $V_n(\mathbb{K})$. Allora l'applicazione

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V_n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n)\,, \end{cases}$$

è un'applicazione lineare biiettiva di $V_n(\mathbb{K})$ in $\mathbb{K}^n$, come abbiamo già osservato in (1.8.1).

(3.1.7) Esempio *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice definita da*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definiamo l'applicazione

$$L_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & L_A(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)\,, \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\,, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n\,, \end{cases}$$

ovvero $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. *Allora l'applicazione* L_A *è un omomorfismo di* $\mathbb{K}^n$ *in* $\mathbb{K}^m$.

(3.1.8) Definizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali e sia* $T : V \to V'$ *un omomorfismo. Diciamo che* T *è un*

– **monomorfismo** *se* T *è iniettiva;*

– **epimorfismo** *se* T *è suriettiva;*

– **isomorfismo** *se* T *è biiettiva;*

– **endomorfismo** *se* $V = V'$*;*

– **automorfismo** *se* T *è biiettiva e* $V = V'$.

(3.1.9) Proposizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali e sia* $T : V \to V'$ *un omomorfismo. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$*;*

(b) *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V$ *risulta* $T(-\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v})$*;*

(c) *per ogni* $\lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_h \in V$ *risulta*

$$T(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_h\boldsymbol{v}_h) = \lambda_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \lambda_h T(\boldsymbol{v}_h)\,;$$

(d) *se* $A = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ *è un insieme di vettori linearmente dipendenti di* V, *allora*

$$T(A) := \{T(\boldsymbol{v}_1), \ldots, T(\boldsymbol{v}_k)\}$$

è un insieme di vettori linearmente dipendenti di V'.

Dimostrazione.
(a) Risulta

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})\,,$$

da cui $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$.
(b) Sia $\boldsymbol{v} \in V$. Sfruttando la proprietà (a) appena dimostrata, abbiamo:

$$\mathbf{0}' = T(\mathbf{0}) = T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) + T(-\boldsymbol{v})\,,$$

da cui $-T(\boldsymbol{v}) = T(-\boldsymbol{v})$.

(c) Discende subito come generalizzazione dall'osservazione (3.1.2).

(d) Per ipotesi, esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, non tutti nulli, tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. Applicando ora T ad ambo i membri otteniamo:

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{v}_i\right) = T(\mathbf{0}),$$

da cui

$$\lambda_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \lambda_k T(\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}',$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli. Ne segue che i vettori $T(\boldsymbol{v}_1), \ldots, T(\boldsymbol{v}_k)$ sono linearmente dipendenti. ■

(3.1.10) Osservazione *Non si può invece dire, in generale, che un omomorfismo trasformi insiemi di vettori liberi in insiemi di vettori liberi (vedremo fra poco che, affinchè questo si verifichi, occorre e basta che l'omomorfismo sia iniettivo).*

(3.1.11) Osservazione *La proprietà* (c) *della Proposizione* (3.1.9) *implica immediatamente che un omomorfismo trasforma sottospazi vettoriali di* $V(\mathbb{K})$ *in sottospazi vettoriali di* $V'(\mathbb{K})$*, cioè se* $W \leq V(\mathbb{K})$ *allora* $T(W) \leq V'(\mathbb{K})$*, dove*

$$T(W) := \{T(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in W\}.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.1.12) Osservazione *Per la proprietà* (a) *della Proposizione* (3.1.9) *possiamo osservare che l'unico omomorfismo dallo spazio vettoriale banale* $V(\mathbb{K}) = \{\mathbf{0}\}$ *in uno spazio* $V'(\mathbb{K})$ *è lo* 0*-omomorfismo.*

La seguente Proposizione afferma che un omomorfismo di $V(\mathbb{K})$ in $V'(\mathbb{K})$ è completamente determinato dai valori che assume su una base di $V(\mathbb{K})$ (se $0 < \dim(V(\mathbb{K})) < +\infty$):

(3.1.13) Proposizione *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali,* $n \neq 0$, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *una base di* $V_n(\mathbb{K})$ *e* $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n \in V'$. *Allora esiste uno ed un solo omomorfismo* $T : V_n \to V'$ *tale che*

$$\forall i = 1, \ldots, n : \quad T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}'_i \,.$$

Tale omomorfismo è definito da

$$\forall \boldsymbol{v} \in V_n : \quad T(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}'_i \,, \quad \textit{essendo } \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \,.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. La dimostrazione consiste nel mostrare che l'applicazione T è lineare e che preso un qualunque omomorfismo $S : V_n \to V'$ tale che $S(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}'_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora S coincide necessariamente con T, ossia risulta $T(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v})$ per ogni $\boldsymbol{v} \in V_n$. ■

(3.1.14) Definizione *Siano* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali su uno stesso campo* $\mathbb{K}$. *Diciamo che* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *sono* isomorfi *quando esiste un isomorfismo* $T : V \to V'$. *In tal caso scriveremo* $V \cong V'$.

(3.1.15) Osservazione *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale di dimensione finita* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ *e* $\mathcal{B}$ *una base di* $V_n(\mathbb{K})$. *Si consideri l'applicazione* $\varphi_{\mathcal{B}} : V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n$ *introdotta nell'esempio* (3.1.6) *e anche nell'Osservazione* (1.8.1). *Tale applicazione è un isomorfismo. Possiamo quindi concludere che tutti gli spazi vettoriali di data dimensione* $n \in \mathbb{N}$ *su un dato campo* $\mathbb{K}$ *sono isomorfi allo spazio vettoriale* $\mathbb{K}^n$ *(e dunque sono fra loro isomorfi: se* $n \neq 0$ *basta infatti fissare una base* $\mathcal{B}$ *di* $V_n(\mathbb{K})$, *una base* $\mathcal{B}'$ *in* $V'_n(\mathbb{K})$ *e l'isomorfismo* $\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}} : V_n \to V'_n$*).*

(3.1.16) Esempio *Ricordiamo che lo spazio vettoriale* $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$ *delle matrici colonna di ordine n (cioè con n righe e una colonna) ha dimensione n, quindi è isomorfo a* $\mathbb{K}^n$. *Un isomorfismo fra* $\mathbb{K}^n$ *e* $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$ *è*

$$C : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & & \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array} \right. .$$

É molto facile verificare che C è lineare, inettiva e suriettiva.

(3.1.17) Osservazione *Si noti che il precedente isomorfismo è indipendente dalla scelta di una base nel dominio e nel codominio (mentre nell'Osservazione* (3.1.15) *si fissavano le basi in $V_n(\mathbb{K})$ e in $V_n'(\mathbb{K})$ per dimostrare l'esistenza di un isomorfismo tra $V_n(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^n$ prima, e poi tra $V_n(\mathbb{K})$ e $V_n'(\mathbb{K})$). In particolare, l'applicazione C trasforma la base canonica di $\mathbb{K}^n$ nella base canonica di* $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(3.1.18) Esempio *Un altro esempio di isomorfismo indipendente dalla scelta delle basi è la trasposizione:*

$$t : \begin{cases} \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & X^t\,. \end{cases}$$

Esercizi

1. Si consideri il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi come spazio vettoriale (di dimensione 2) su $\mathbb{R}$ e si stabilisca quali delle seguenti funzioni sono applicazioni lineari specificando se si tratta di applicazioni iniettive o suriettive:

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a+ib & \longmapsto & a\,, \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a+ib & \longmapsto & b\,, \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a+ib & \longmapsto & b^2\,, \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^2,y^2)\,, \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X+A\,, \end{cases}$$

essendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale ed $\boldsymbol{a} \in V(\mathbb{K})$. Si dica se l'applicazione

$$f : \begin{cases} V & \longrightarrow & V \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a} \end{cases}$$

è un endomorfismo.

3. Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $L_1, L_2 : V \to \mathbb{K}$ due applicazioni lineari. Verificare che l'applicazione

$$L : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \boldsymbol{v} & \longmapsto & (L_1(\boldsymbol{v}), L_2(\boldsymbol{v})) \end{cases}$$

è anch'essa lineare.

4. Sia V uno spazio vettoriale. Per ogni $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \in V$ chiamiamo *segmento* di estremi $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}_1$ l'insieme dei vettori della forma $t\boldsymbol{v}_1 + (1-t)\boldsymbol{v}_0$, al variare di $t \in [0, 1]$. Un sottoinsieme C di V è detto *convesso* se comunque si scelgano $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \in C$, l'intero segmento di estremi $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{v}_1$ è contenuto in C.

(a) Si dimostri che ogni sottospazio vettoriale di V è convesso in V;

(b) se W è uno spazio vettoriale, $T : V \to W$ un'applicazione lineare e C un sottoinsieme convesso di V, si dimostri che $T(C)$ è convesso in W;

(c) se $c \in \mathbb{R}$ e $T : V \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare, si dimostri che l'insieme

$$K = \{\boldsymbol{v} \in V : T(\boldsymbol{v}) \leq c\}$$

è convesso in V.

5. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il sottoinsieme $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e sia $\boldsymbol{v} = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Si verifichi che $\mathbb{R}^3 = H \oplus \langle \boldsymbol{v} \rangle$. Si consideri poi l'applicazione $p : \mathbb{R}^3 \to H$ tale per cui $p(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{h}$ per ogni $\boldsymbol{h} \in H$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Si dimostri che l'applicazione p è lineare.

6. Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, U, W due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$ ed $f : V \to V$ un isomorfismo. Supponiamo che $V = U \oplus W$ e che per ogni $\boldsymbol{u} \in U$ risulti $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$. Si dimostri che $f(W)$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ e che $V = U \oplus f(W)$.

2 Rappresentazione scalare degli omomorfismi

Siano $V(\mathbb{K})$ e $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V(\mathbb{K}) \to V'(\mathbb{K})$ un omomorfismo. Supponiamo che $\dim(V(\mathbb{K})) = n$ e $\dim(V'(\mathbb{K})) = m$ e siano

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\,, \qquad \overline{\mathcal{B}} = (\overline{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{e}}_m)$$

basi rispettivamente di $V(\mathbb{K})$ e di $V'(\mathbb{K})$.
Note le componenti $(x_1, \ldots, x_n)$ di un vettore $\boldsymbol{v} \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, ci chiediamo come si calcolano le componenti $(y_1, \ldots, y_m)$ di $T(\boldsymbol{v}) \in V'$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$. Si considerino perciò le funzioni

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \quad V & \longrightarrow \quad \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i & \longmapsto \quad (x_1, \ldots, x_n)\,, \end{cases}$$

$$\varphi_{\overline{\mathcal{B}}} : \begin{cases} \quad V' & \longrightarrow \quad \mathbb{K}^m \\ \boldsymbol{v}' = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \overline{\boldsymbol{e}}_i & \longmapsto \quad (y_1, \ldots, y_m)\,. \end{cases}$$

Il legame cercato tra le x_i e le y_i si esprime componendo l'isomorfismo $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ con l'omomorfismo T e successivamente con l'isomorfismo $\varphi_{\overline{\mathcal{B}}}$, ottenendo così l'omomorfismo $\widetilde{T} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definito da:

$$\boxed{\widetilde{T} = \varphi_{\overline{\mathcal{B}}} \circ T \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}\,.}$$

La situazione è illustrata dal seguente diagramma:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} V & \xrightarrow{T} & V' \\ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \uparrow & & \downarrow \varphi_{\overline{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\widetilde{T}} & \mathbb{K}^m \end{array}}$$

(3.2.1) Definizione *Chiamiamo* **rappresentazione scalare di T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$** *l'omomorfismo $\widetilde{T}$ appena introdotto.*

Se ora scriviamo i vettori $T(\boldsymbol{e}_1), \ldots, T(\boldsymbol{e}_n) \in V'$ come combinazioni lineari dei vettori di $\overline{\mathcal{B}}$, otteniamo espressioni del tipo:

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \overline{\boldsymbol{e}}_i\,, \quad \text{con } a_{11}, \ldots, a_{m1} \in \mathbb{K}\,,$$

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{e}_2) &= \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\overline{\boldsymbol{e}}_i\,, \quad \text{con } a_{12},\dots,a_{m2}\in\mathbb{K}\,,\\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
T(\boldsymbol{e}_n) &= \sum_{i=1}^{m} a_{in}\overline{\boldsymbol{e}}_i\,, \quad \text{con } a_{1n},\dots,a_{mn}\in\mathbb{K}\,.
\end{aligned}
$$

Essendo $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j$, risulta

$$
T(\boldsymbol{v}) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{\boldsymbol{e}}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)}_{y_i\in\mathbb{K}}\overline{\boldsymbol{e}}_i\,.
$$

Quindi, le componenti $(y_1,\dots,y_m)$ di $T(\boldsymbol{v})$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$, sono date da

$$
\begin{cases}
y_1 &= a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\,,\\
\vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\
y_m &= a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n\,.
\end{cases}
$$

In altri termini, possiamo affermare che $(y_1,\dots,y_m) = L_A(x_1,\dots,x_n)$, dove

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})\,,
$$

ed $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è proprio l'applicazione lineare $\widetilde{T}$ che volevamo determinare, dove A è la matrice $m\times n$ avente *sulle colonne* le componenti rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ del codominio di T dei trasformati $T(\boldsymbol{e}_1),\dots,T(\boldsymbol{e}_n)$ dei vettori della base $\mathcal{B}$ del dominio.

Identificando ogni vettore $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ con un vettore colonna

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{K})\,,
$$

e ogni vettore $\boldsymbol{y} = (y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{K}^m$ con un vettore colonna

$$
\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m,1}(\mathbb{K})\,,
$$

scriveremo:

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{T}(\boldsymbol{x}) = L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\,,$$

cioè

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_{m1}}_{T(\boldsymbol{e}_1)} & \underbrace{a_{m2}}_{T(\boldsymbol{e}_2)} & \cdots & \underbrace{a_{mn}}_{T(\boldsymbol{e}_n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

La matrice A 'rappresenta' T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$. Avremo allora che

$$\widetilde{T} = L_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{cases}$$

è la **rappresentazione scalare di T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$.**

(3.2.2) Osservazione *Se consideriamo una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ e l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ dell' esempio* (3.1.7), *si verifica immediatamente che A è la matrice che rappresenta L_A rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$.*

(3.2.3) Osservazione *La matrice che rappresenta l'applicazione lineare*

$$\mathrm{Id}_{V_n} : \begin{cases} V_n & \longrightarrow & V_n \\ \boldsymbol{v} & \longmapsto & \boldsymbol{v} \end{cases}$$

rispetto ad una qualunque base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ è la matrice identica di ordine n:

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})\,.$$

(3.2.4) Esercizio *Si consideri l'applicazione lineare*

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 2x+2z \\ x-y \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Si determini la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$ che rappresenta T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$. Si determini poi la matrice $A' \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$ che rappresenta

T rispetto alle basi

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\},\quad \overline{\mathcal{B}}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}.$$

rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Lasciamo come esercizio di trovare la matrice A.
Per quanto riguarda A', basta calcolare i trasformati dei vettori di $\mathcal{B}$ ed esprimere ciascuna immagine come combinazione lineare dei vettori di $\overline{\mathcal{B}}$:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=a_{11}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

da cui $a_{11}=10$ e $a_{21}=-3$.

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}=a_{12}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

da cui $a_{12}=4$ e $a_{22}=-2$.

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=a_{13}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+a_{23}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

da cui $a_{13}=-2$ e $a_{23}=1$.
Dunque, rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ otteniamo:

$$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=A'\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad \text{con}\quad A'=\begin{bmatrix}10&4&-2\\-3&-2&1\end{bmatrix},$$

e l'esercizio è concluso. ♣

(3.2.5) Esercizio *Siano $V(\mathbb{R})=\mathbb{R}_2[x]$ e $V'(\mathbb{R})=\mathbb{R}_3[x]$. Si consideri l'applicazione lineare*

$$T:\begin{cases} V & \longrightarrow & V' \\ p(x) & \longmapsto & x^2p'(x+1)\,, \end{cases}$$

dove l'apice indica la derivata rispetto ad x. Per esempio, se $p(x)=x^2+2x+1$, si ha

$$p'(x)=2x+2\,,\qquad p'(x+1)=2(x+1)+2=2x+4$$

e quindi

$$T(p(x)) = x^2(2x+4) = 2x^3 + 4x^2\,.$$

Si considerino le seguenti basi (canoniche):

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2) \quad \textit{per } V\,,$$

$$\overline{\mathcal{B}} = (1, x, x^2, x^3) \quad \textit{per } V'\,.$$

Si chiede di determinare la matrice A che rappresenta T rispetto a tali basi.

Soluzione. La matrice A che rappresenta T sarà 4×3, essendo $\dim(V(\mathbb{R})) = 3$ e $\dim(V'(\mathbb{R})) = 4$. Per trovarla calcoliamo:

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,,$$

$$T(x) = x^2 = 0 \cdot 1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,,$$

$$T(x^2) = 2x^3 + 2x^2 = 0 \cdot 1 + 0x + 2x^2 + 2x^3 \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\,.$$

Quindi otteniamo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\,.$$

♣

Esercizi

1. Siano $a \in \mathbb{R}$ e $T_a : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$\forall p(t) \in \mathbb{R}_2[t] : \quad T_a(p(t)) = (p(-1), p(a), p(1))\,.$$

Si trovino i valori di a affinchè l'applicazione T_a sia un isomorfismo.

2. Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$T(x_1, \dots, x_5) = (x_2 + 2x_5, x_4, x_1 + x_3) .$$

Si determini la matrice A tale che $T = L_A$.

3. Siano $h \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione definita da

$$T(at^2 + bt + c) = (t + h)(c + at) .$$

Si dimostri che T è lineare e si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali per cui T sia iniettiva o suriettiva.

4. Siano V l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$,

$$U = \{f \in V : f \text{ è un omomorfismo}\} , \quad W = \{f \in U : f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = 0\} ,$$

dove $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si dimostri che U e W sono sottospazi vettoriali di V con $\dim(U) = 3$ e $\dim(W) = 2$.

3 Nucleo e immagine di un omomorfismo

Ad ogni omomorfismo T si possono associare due sottoinsiemi (uno nel dominio e l'altro nel codominio) caratterizzati mediante la seguente

(3.3.1) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su un medesimo campo $\mathbb{K}$ e $T : V \to V'$ un omomorfismo. Chiamiamo* **nucleo di** *T il sottoinsieme di V*

$$\mathrm{Ker}(T) := \{\boldsymbol{v} \in V : T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}'\} .$$

Chiamiamo **immagine di** *T il sottoinsieme di V'*

$$\mathrm{Im}(T) := \{T(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in V\} = \{\boldsymbol{v}' \in V' : (\exists \boldsymbol{v} \in V : T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}')\} = T(V) .$$

Riprendendo i primi esempi visti di omomorfismi, possiamo detrminarne nucleo ed immagine.

(3.3.2) Esempio *Consideriamo l'applicazione lineare*

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - y\,. \end{cases}$$

Risulta che $\mathrm{Ker}(T) = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$*.*

(3.3.3) Esempio *Sia* $V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e si consideri l'omomorfismo identico* Id_V*. Allora* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_V) = \{\mathbf{0}\}$ *e* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_V) = V$*.*
Se ora consideriamo lo 0*-ommorfismo definito nell'Esempio* (3.1.4) *abbiamo* $\mathrm{Ker}(O) = V$ *e* $\mathrm{Im}(O) = \{\mathbf{0}'\}$*.*

(3.3.4) Esempio *Sia* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e sia* $\mathcal{B}$ *una sua base ordinata. Considerando l'applicazione* $\varphi_{\mathcal{B}} : V_n \to \mathbb{K}^n$ *risulta che* $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{B}}) = \{\mathbf{0}\}$ *e* $\mathrm{Im}(\varphi_{\mathcal{B}}) = \mathbb{K}^n$*.*

(3.3.5) Esempio *Sia* $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Riprendendo l'applicazione* $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *tale che* $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$*, si ha che* $\mathrm{Ker}(L_A)$ *coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$*. Inoltre* $\mathrm{Im}(L_A)$ *coincide con il sottoinsieme di* $\mathbb{K}^m$ *dei vettori* $\boldsymbol{b}$ *tali per cui il sistema* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *sia risolubile.*

Nucleo ed immagine di un omomorfismo T tra due spazi vettoriali risultano essere sottospazi vettoriali rispettivamente del dominio e del codominio di T; essi inoltre caratterizzano l'iniettività e la suriettività degli omomorfismi. Tutto ciò è espresso nei due seguenti teoremi:

(3.3.6) Teorema *Siano* $V(\mathbb{K})$*,* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali e* $T : V \to V'$ *un omomorfismo. Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $\mathrm{Ker}(T)$ *è un sottospazio vettoriale di* $V(\mathbb{K})$*;*

(*b*) $\mathrm{Im}(T)$ *è un sottospazio vettoriale di* $V'(\mathbb{K})$*.*

Dimostrazione.
(a) Dal fatto che $\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(T)$, si ha $\mathrm{Ker}(T) \neq \emptyset$. Utilizziamo ora il criterio di riconoscimento per i sottospazi. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Allora $T(\boldsymbol{v}_1) = \mathbf{0}'$ e $T(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}'$. Pertanto, sfruttando la linearità di T:

$$T(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) = \alpha T(\boldsymbol{v}_1) + \beta T(\boldsymbol{v}_2) = \alpha\mathbf{0}' + \beta\mathbf{0}' = \mathbf{0}',$$

da cui $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$.
(b) Osservando che $\mathbf{0}' = T(\mathbf{0})$, segue che $\mathbf{0}' \in \mathrm{Im}(T)$ da cui $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$. Usiamo ancora il criterio di riconoscimento per i sottospazi. Siano $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2 \in \mathrm{Im}(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Esistono $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ tali che $T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}'_1$ e $T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}'_2$. Allora

$$\alpha\boldsymbol{v}'_1 + \beta\boldsymbol{v}'_2 = \alpha T(\boldsymbol{v}_1) + \beta T(\boldsymbol{v}_2) = T(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) \in T(V) = \mathrm{Im}(T),$$

da cui la tesi. ■

(3.3.7) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V \to V'$ un omomorfismo. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *T è un monomorfismo se, e solo se,* $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$*;*

(b) *T è un epimorfismo se, e solo se,* $\mathrm{Im}(T) = V'$.

Dimostrazione.
(a) Supponiamo che T sia iniettivo. Sia $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$. Allora $T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}'$. D'altra parte risulta $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. Dall'iniettività di T deduciamo che $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, quindi $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$.
Viceversa, supponiamo ora che $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ tali che $T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{w})$. Dalla linearità di T deduciamo che $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}'$, ovvero $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \in \mathrm{Ker}(T)$. Segue che $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, cioè $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.
(b) É sufficiente ricordare la definizione di applicazione suriettiva. ■

(3.3.8) Esercizio *Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V \to V'$ un omomorfismo. Si dimostri che T è un monomorfismo se, e solo se, T trasforma insiemi* finiti *liberi di vettori di V in insiemi liberi di vettori di V'.*

Soluzione. Supponiamo che T sia iniettivo, il che equivale a supporre che $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$ grazie al Teorema (3.3.7). Sia

$$A = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_h\}$$

un insieme libero di V e consideriamo

$$T(A) = \{T(\boldsymbol{v}_1), \dots, T(\boldsymbol{v}_h)\}\,.$$

Se consideriamo una qualsiasi combinazione lineare $\alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_h T(\boldsymbol{v}_h) = \mathbf{0}'$ che dà il vettore nullo, otteniamo:

$$T(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_h \boldsymbol{v}_h) = \mathbf{0}' \Rightarrow \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \in \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Segue che $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_h \boldsymbol{v}_h = \mathbf{0}$ e, poichè i vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_h$ sono linearmente indipendenti, deve essere $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, h$.
Viceversa, supponiamo ora che T trasformi necessariamente vettori liberi in vettori liberi. In particolare, per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ risulta che $T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}'$. Se $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ abbiamo una contraddizione, in quanto $\{\boldsymbol{v}\}$ è libero mentre $\{\mathbf{0}'\}$ è legato. Pertanto, deve essere $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, ovvero $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$. ♣

E' possibile provare la medesima proprietà anche togliendo l'ipotesi di finitezza dei sottoinsiemi.

Come vedremo, determinare il nucleo di un omomorfismo corrisponde a risolvere un sistema lineare omogeneo. Per trovare l'immagine è invece utile il seguente

(3.3.9) Lemma *Siano $V_n(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base per $V_n(\mathbb{K})$ e $T : V_n \to V'$ un omomorfismo. Allora*

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(\boldsymbol{v}_1), \dots, T(\boldsymbol{v}_n) \rangle\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo $\mathrm{Im}(T) := \{T(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in V\}$. Dal fatto che ogni $\boldsymbol{v} \in V$ è combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$, si ha

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n) : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} =$$

$$= \{\alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_n T(\boldsymbol{v}_n) :\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} = \langle T(\boldsymbol{v}_1), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\rangle \ ,$$

da cui la tesi. ■

(3.3.10) Osservazione *Non è detto che* $\{T(\boldsymbol{v}_1), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\}$ *sia una base per* $\mathrm{Im}(T)$*: tali vettori formano solo un sistema di generatori (possono risultare anche linearmente dipendenti se* T *non è iniettivo, come si vede nel prossimo esercizio).*

(3.3.11) Esercizio *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *data da*

$$T(x, y, z) = (x - y, 2y - 2x, z)\,.$$

Si verifichi che T *è lineare e si determinino* $\mathrm{Ker}(T)$ *e* $\mathrm{Im}(T)$*.*

Soluzione. Per la verifica della linearità di T è suffuciente osservare che $T = L_A$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Individuiamo il nucleo e l'immagine di T. Per trovare $\mathrm{Ker}(T)$ è sufficiente risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y = 0\,, \\ 2y - 2x = 0\,, \\ z = 0\,, \end{cases}$$

da cui si ricava che

$$\mathrm{Ker}(T) = \langle(1, 1, 0)\rangle\ .$$

Per il calcolo di $\mathrm{Im}(T)$ sfruttiamo il Lemma (3.3.9):

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\rangle =$$

$$= \langle(1, -2, 0), (-1, 2, 0), (0, 0, 1)\rangle = \langle(1, -2, 0), (0, 0, 1)\rangle\ .$$

Quindi $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0)\}$ è una base per $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathcal{C} = \{(1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$ è una base per $\mathrm{Im}(T)$. Pertanto $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ e $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$. Se ne deduce che T non è nè iniettiva nè suriettiva. ♣

(3.3.12) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ e $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V \to V'$ un'applicazione lineare. Chiamiamo* **rango di** *T (e scriveremo $\mathrm{rg}(T)$) la dimensione dell'immagine di T:*

$$\mathrm{rg}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))\,.$$

Si noti che il rango di un'applicazione lineare T tra spazi finitamente generati così definito coincide col rango della matrice A della rappresentazione scalare di T rispetto ad una qualunque coppia di basi. Infatti dal Lemma (3.3.9) e da come è costruita la matrice A nel paragrafo 2 segue subito che $\dim(Im(T)) = \mathrm{rg}(A)$.

(3.3.13) Teorema (della dimensione o della nullità + rango) *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato, $V'(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $T : V \to V'$ un omomorfismo. Allora*

$$\boxed{\dim(V_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \mathrm{rg}(T)\,.}$$

(3.3.14) Corollario *Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali con V finitamente generato e $T : V \to V'$ un omomorfismo. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) T è un monomorfismo se, e solo se, $\mathrm{rg}(T) = \dim(V(\mathbb{K}))$;

(b) T è un epimorfismo se, e solo se, $\mathrm{rg}(T) = \dim(V'(\mathbb{K}))$;

(c) se $\dim(V(\mathbb{K})) = \dim(V'(\mathbb{K}))$ (in particolare, se $V(\mathbb{K}) = V'(\mathbb{K})$) si ha che T è iniettiva se, e solo se, T è suriettiva.

(3.3.15) Osservazione *Siano $V_n(\mathbb{K})$, $V_m(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V_n \to V_m$ un omomorfismo. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) se T è iniettivo, allora $n \leq m$;

(b) se T è suriettivo, allora $n \geq m$;

(c) *se* T *è biiettivo, allora* $n = m$.

Dimostrazione.
(a) Dal Corollario (3.3.14) deduciamo che

$$n = \dim(V_n(\mathbb{K})) = \mathrm{rg}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(V'(\mathbb{K})) = m\,.$$

(b) Sempre dal corollario precedente abbiamo

$$n = \dim(V_n(\mathbb{K})) \geq \mathrm{rg}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V'(\mathbb{K})) = m\,.$$

(c) Basta combinare (a) e (b). ■

(3.3.16) Teorema (di categoricità) *Siano* $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *due spazi vettoriali di dimensione finita su uno stesso campo* $\mathbb{K}$. *Allora sono fatti equivalenti:*

(a) $V(\mathbb{K})$ *e* $V'(\mathbb{K})$ *sono isomorfi;*

(b) $\dim(V(\mathbb{K})) = \dim(V'(\mathbb{K})) = n$.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ É sufficiente ricordare l'Osservazione (3.1.15).
$(b) \Longrightarrow (a)$ Śe $n = 0$ è banale; se $n \neq 0$, si fissino una base $\mathcal{B}$ di $V(\mathbb{K})$ e una base $\overline{\mathcal{B}}$ di $V'(\mathbb{K})$ e si considerino gli isomorfismi $\varphi_{\mathcal{B}} : V(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}^n$ e $\varphi_{\overline{\mathcal{B}}} : V'(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}^n$. Risulta che $\varphi_{\overline{\mathcal{B}}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}} : V(\mathbb{K}) \mapsto V'(\mathbb{K})$ è un isomorfismo. ■

Esercizi

1. Si consideri l'applicazione

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ (a,b) & \longmapsto & a + bx\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è un omomorfismo. Determinare inoltre $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

2. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca se f è iniettivo o suriettivo.

3. In $\mathbb{R}^3$ si costruiscano, se possibile, gli endomorfismi verificanti le seguenti condizioni:

(1) $\mathrm{Ker}(f) = A$, essendo $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^3 = y\}$.

(2) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) = B$, essendo $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, 3x + y - z = 0\}$.

(3) $\mathrm{Ker}(f) = B$.

(4) $\mathrm{Im}(f) = B$.

4. Si determini la matrice A associata all'omomorfismo

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, x - y, 2y + x)\,, \end{cases}$$

rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 0)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre il nucleo e l'immagine di f. Dire, infine, se f è iniettiva o suriettiva.

5. Siano dati i seguenti endomorfismi di $\mathbb{R}^3$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, 2y, z)\,, \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + z, 2z, x + y + z)\,. \end{cases}$$

Si dia la rappresentazione matriciale rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ degli omomorfismi f, g, $(f+g)$, $(f-g)$, $(f+g-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Per ciscun endomorfismo si determinino il nucleo e l'immagine.

6. Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinchè l'endomorfismo

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & ((1 - k)x - y + z, 2x + (1 - k)y, 3x + (1 - k)z)\,, \end{cases}$$

risulti essere invertibile.

7. Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e S, T due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$ tali che $V = S \oplus T$. Siano inoltre $f : S \to W$ e $g : T \to W$ due applicazioni lineari. Si dimostri che esiste una ed una sola applicazione lineare $h : V \to W$ la cui restrizione ad S e a T coincide rispettivamente con f e g.

8. Siano $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ le basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare individuata rispetto a tali basi dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si richiede di trovare $T(1, 2, -1)$, $\mathrm{Ker}(T)$, $\dim(\mathrm{Ker}(T))$, $T^{-1}(1, 4)$.

4 Sistemi lineari e omomorfismi vettoriali

Dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (con $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$) in m equazioni ed n incognite a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$, alla matrice A è associato l'omomorfismo

$$L_A : \begin{cases} \quad\mathbb{K}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{K}^m \\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \longmapsto \quad A\boldsymbol{x}\,, \end{cases}$$

e, se

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m\,,$$

risolvere il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ significa determinare le preimmagini di $\boldsymbol{b}$ (se esistono) attraverso l'omomorfismo L_A. Dunque il sistema è risolubile o compatibile se, e solo se, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(L_A)$.

In particolare, possiamo dedurre:

(*i*) L_A è suriettivo se, e solo se, il sistema ammette soluzioni per ogni $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m$ (e in generale la soluzione non sarà unica);

(*ii*) L_A è iniettivo se, e solo se, il sistema ha una ed una sola soluzione se $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(L_A)$;

(*iii*) L_A è biiettiva se, e solo se, il sistema possiede una ed una sola soluzione per ogni $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m$ (cfr. Teorema di Cramer).

Possiamo ritrovare velocemente tutti i risultati circa il nucleo ed immagine per gli omomorfismi tra $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$.
Poniamo $A = [A_1| \dots |A_n]$ dove A_j è la colonna j-esima della matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Osserviamo ora che

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : \, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = W \, ,$$

e

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m : \, \text{il sistema } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ è compatibile}\} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \ ,$$

pertanto $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \mathrm{rg}(A)$. Deduciamo quindi che

(*i*) L_A è iniettivo se, e solo se, per ogni $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(L_A)$ il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ possiede una ed una sola soluzione. Ciò equivale ad affermare che il sistema omogeneo associato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ possiede una ed una sola soluzione se, e solo se, $\mathrm{Ker}(L_A) = \{\boldsymbol{0}\}$;

(*ii*) L_A è suriettivo se, e solo se, $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{K}^m$;

(*iii*) L_A è biiettivo se, e solo se, $\mathrm{Ker}(L_A) = \{\boldsymbol{0}\}$ e $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{K}^m$.

Inoltre sappiamo che $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = n - \mathrm{rg}(A)$ e quindi ritroviamo il Teorema della 'nullità + rango':

$$n = \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) + \mathrm{rg}(A) \, .$$

Da ciò segue anche L_A è iniettivo se, e solo se, $\mathrm{rg}(A) = n$; L_A è suriettivo se, e solo se, $\mathrm{rg}(A) = m$; L_A è biiettivo se, e solo se, $m = n$ e $\mathrm{rg}(A) = n$, cioè $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ e $\det(A) \neq 0$. Concludendo, L_A è un isomorfismo da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ se, e solo se, A è una matrice quadrata e invertibile.

5 Composizione di omomorfismi

(3.5.1) Proposizione *Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ e $V''(\mathbb{K})$ tre spazi vettoriali e $T : V \to V'$ ed $S : V \to V''$ due omomorfismi. Allora $S \circ T : V \to V''$ è un omomrfismo.*

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.5.2) Proposizione *Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V \to V'$ un isomorfismo. Allora anche $T^{-1} : V' \to V$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.5.3) Corollario *La relazione $\cong$ è di equivalenza sull'insieme degli spazi vettoriali su un fissato campo $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Siano $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ e $V''(\mathbb{K})$ tre spazi vettoriali su un medesimo campo $\mathbb{K}$.
Per la verifica della proprietà riflessiva è sufficiente considerare l'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$. Per la proprietà simmetrica basta ricordare la proposizione precedente. Infine, se $T : V \to V'$ ed $S : V' \to V''$ sono due isomorfismi, dalla Proposizione (3.5.1) otteniamo che $S \circ T : V \to V''$ è un isomorfismo, da cui segue la proprietà transitiva. ∎

6 Composizione di omomorfismi e prodotto di matrici

Siano $V = V_n(\mathbb{K})$, $V' = V'_m(\mathbb{K})$ e $V'' = V''_p(\mathbb{K})$ tre spazi vettoriali di dimensioni n, m, p rispettivamente, $T : V \to V'$ ed $S : V' \to V''$ due applicazioni lineari. Consideriamo inoltre tre basi $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ e $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ rispettivamente di $V(\mathbb{K})$, $V'(\mathbb{K})$ e $V''(\mathbb{K})$. Infine, consideriamo la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ che rappresenta T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ e la matrice $C \in \mathrm{Mat}_{p,m}(\mathbb{K})$ che rappresenta S rispetto alle basi $\overline{\mathcal{B}}$

e $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$. Allora la matrice che rappresenta $S \circ T : V \to V''$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ è $CA \in \mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbb{K})$. Infatti sia $\boldsymbol{v} \in V$. Supponiamo che $\boldsymbol{v}$ abbia componenti rispetto a $\mathcal{B}$ date da $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. Supponiamo inoltre che $T(\boldsymbol{v}) \in V'$ abbia componenti $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^t$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ ed infine supponiamo che $(S \circ T)(\boldsymbol{v}) \in V''$ abbia componenti $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_p)$ rispetto a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$. Allora

$$\boldsymbol{z} = C\boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\,,$$

da cui

$$\boldsymbol{z} = C(A\boldsymbol{x}) = (CA)\boldsymbol{x}\,.$$

In particolare, se $T : V \to V'$ è un isomorfismo, si ha $m = n$ e, posto $V'' = V$, $S = T^{-1} : V' \to V$ (che è ancora un isomorfismo) e $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}$, la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ è quadrata di ordine n, ovvero $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ e la matrice $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ che rappresenta T^{-1} rispetto alle basi $\overline{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B}$ è tale che CA sia la matrice di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ che rappresenta $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, ovvero la matrice identica I_n di ordine n. Dunque $CA = I_n$. D'altra parte risulta anche $T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_V$, per cui per le matrici associate si ha $AC = I_n$. Pertanto

$$AC = I_n = CA \Rightarrow C = A^{-1}\,.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente

(3.6.1) Teorema *Siano $V = V_n(\mathbb{K})$, $V' = V_n'(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $T : V \to V'$ un omomorfismo. Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) *T è un isomorfismo;*

(*b*) *la matrice A che rappresenta T rispetto a due basi qualsiasi è quadrata ed invertibile (ovvero $\det(A) \neq 0$) e la sua inversa A^{-1} rappresenta, rispetto alle stesse basi, l'isomorfismo inverso $T^{-1} : V' \to V$.*

(3.6.2) Esempio *Siano $V = V' = \mathbb{R}_2[x]$ e consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$ data da $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Supponiamo che sia assegnato un omomorfismo $T : V \to V'$ tale che:*

$$T(1) = 1\,, \qquad T(x) = x - 1\,, \qquad T(x^2) = 2x^2 - 4x - 6\,.$$

Allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Risulta subito che $\det(A) = 2$, *quindi* $T : V \to V$ *è un automorfismo.*

7 Tecniche di calcolo

Vogliamo ora applicare la riduzione a scala di sistemi lineari a calcoli relativi a spazi vettoriali ed omomorfismi. Osserviamo subito che il Teorema (2.6.19) si può qui riformulare nel seguente modo:

(3.7.1) Teorema *Sia* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *un sistema lineare e* $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ *una sua riduzione a scala. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(a) $(L_A)^{-1}(\boldsymbol{b}) = (L_S)^{-1}(\boldsymbol{c})$;

(b) $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Ker}(L_S)$;

(c) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S)$.

(d) se $S^{(j_1)}, \ldots, S^{(j_r)}$ $(r = \mathrm{rg}(S))$ *sono le colonne corrispondenti ai pivot di* S, *allora* $\{A^{(j_1)}, \ldots, A^{(j_r)}\}$ *è una base di* $\mathrm{Im}(L_A)$.

Vediamo ora alcune problematiche che si possono incontrare nella risoluzione dei vari esercizi proposti.

a) *Risoluzione di un sistema lineare* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Nei casi piccoli si fa ricorso alla regola di Cramer, altrimenti si utilizza la riduzione a scala e si lavora con il sistema equivalente $S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.

b) *Determinazione del rango e di una base per l'immagine di un'applicazione lineare* L_A.

Anzitutto si effettua una riduzione a scala partendo dalla matrice A per ottenere la matrice S. Successivamente si trovano i numeri di colonna dei pivot. Le colonne corrispondenti della matrice A formano la base cercata.

c) *Determinazione della dimensione e base del nucleo di un'applicazione lineare* L_A.

Partendo dalla matrice A, mediante una riduzione a scala si ottiene la matrice S. Si considera poi l'applicazione lineare L_S e si determina $\mathrm{Ker}(L_S)$ risolvendo all'indietro il sistema $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Dal fatto che $\mathrm{Ker}(L_S) = \mathrm{Ker}(L_A)$ si ottengono dimensione e base di $\mathrm{Ker}(L_A)$.

d) *Determinazione della dimensione e della base del sottospazio generato da k vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{K}^n$.*

Basta considerare la matrice $A = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k] \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{K})$ formata dai vettori $\boldsymbol{v}_j$ per colonne. Siccome $\mathrm{Im}(L_A) = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$, la dimensione del sottospazio generato da $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ coincide a $\mathrm{rg}(A)$ ed una base la si trova con una riduzione a scala e considerando nella matrice A le colonne corrispondenti ai pivot.

e) *Completamento di un insieme di vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^n$ ad una base.*

Si considera la matrice $A = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$, e poi si applica il punto **d)**. La riduzione a scala è tale da assicurare la presenza dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ nella base cercata.

f) *Determinazione della dimensione e di una base di $U + W$, essendo U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$.*

Si considerano anzitutto le basi $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ rispettivamente di U e W. Allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un sistema di generatori per $U + W$ e si applica il punto **d)**.

Vediamo ora una serie di esempi che illustrano le precedenti casistiche.

(3.7.2) Esercizio *Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, essendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Si richiede di determinare $\mathrm{rg}(A)$ *ed una base per* $\mathrm{Im}(L_A)$.

Soluzione. Questo esercizio si risolve seguendo il punto **b)** prima descritto. Effettuiamo una riduzione a scala di A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S\,.$$

La matrice a scala S ha tre pivot, quindi $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A) = 3$. Una base per $\mathrm{Im}(L_A)$ è data dalle colonne di A che corrispondono ai pivot di S e cioè dalle prime tre:

$$\mathrm{Im}(L_A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Si fa notare che l'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base per $\mathrm{Im}(L_A)$. Se invece prendiamo le colonne di S che corrispondono ai pivot otteniamo che l'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base per $\mathrm{Im}(L_S)$. ♣

(3.7.3) Esercizio *Si consideri l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, *essendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si richiede di determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(L_A)$.

Soluzione. Il nucleo di L_A coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0\,, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0\,, \\ \frac{1}{2}x_1 - x_3 + x_5 = 0\,. \end{cases}$$

Si verifica che $\mathrm{rg}(A) = 3$ quindi $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 2$. Un minore di A di ordine tre non singolare è dato da

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Utilizziamo il metodo di Cramer. Riscrivendo meglio il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = -x_4\,, \\ 2x_1 + x_2 = -x_4 + x_5\,, \\ \frac{1}{2}x_1 - x_3 = -x_5\,. \end{cases}$$

Pertanto:

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} -x_4 & 0 & 1/2 \\ -x_4 + x_5 & 1 & 0 \\ -x_5 & 0 & -1 \end{bmatrix}}{\det(M)} = \frac{4}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5\,.$$

$$x_2 = \frac{-\det \begin{bmatrix} 1 & -x_4 & 1/2 \\ 2 & -x_4 + x_5 & 0 \\ 1/2 & -x_5 & -1 \end{bmatrix}}{\det(M)} = \frac{1}{5}x_4 + \frac{7}{5}x_5\,.$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_4 \\ 2 & 1 & -x_4 + x_5 \\ 1/2 & 0 & -x_5 \end{bmatrix}}{\det(M)} = -\frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5\,.$$

Pertanto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 4/5 \\ -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

risulta che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4/5 \\ -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/5 \\ 7/5 \\ 4/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base per $\mathrm{Ker}(L_A)$.

Risolviamo ora l'esercizio mediante la riduzione a scala della matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -5/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 9/4 \end{bmatrix} = S\,.$$

La matrice S possiede tre pivot, quindi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S) = 3$ e $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 2$. Risolvendo all'indietro il sistema $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ otteniamo

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - 3x_5\,, \quad x_2 = x_3 + 2x_5\,, \quad x_4 = -3x_5\,.$$

Pertanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Risulta che l'insieme

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un'altra base per $\mathrm{Ker}(L_A)$. ♣

(3.7.4) Esercizio *Siano dati in $\mathbb{K}^5$ i vettori*

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trovare dimensione e una base per $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_7 \rangle$.

Soluzione. Consideriamo la matrice A con i vettori sulle colonne e riduciamola a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} = S\,.$$

Allora $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_7 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_7 \rangle = \mathbb{K}^5$ e la dimensione è $5 = \mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A)$ (si noti che la riduzione a scala è stata ancor più immediata perchè avevamo posizionato $\boldsymbol{v}_7$ al terzo posto, in considerazione dei due zeri finali). ♣

(3.7.5) Esercizio *Siano dati in $\mathbb{K}^4$ i vettori*

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Verificare che sono linearmente indipendenti e completarli ad una base per $\mathbb{K}^4$.

Soluzione. Seguiamo quanto descritto al punto **e)**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S\,.$$

Le prime tre colonne corrispondono ai pivot di S, quindi $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$ sono linearmente indipendenti. L'ultimo pivot è sull'ultima colonna, quindi $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ è la base cercata. ♣

(3.7.6) Esercizio *Si considerino in $\mathbb{K}^5$ i seguenti sottoinsiemi:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^5 : \, x_1 + x_3 = 0 \, \wedge \, x_2 + x_3 - x_5 = 0 \right\},$$

e

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^5 \,:\, x_2 - x_5 = 0 \,\wedge\, x_3 = 0 \right\}.$$

Verificare che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^5$. Determinare dimensione ed una base per U e per W e trovare dimensione e una base per $U + W$.

Soluzione. Anzitutto osserviamo che $U = \mathrm{Ker}(L_A)$, dove $L_A : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^2$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $W = \mathrm{Ker}(L_B)$, dove $L_B : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^2$ con

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^5$ in quanto nuclei di opportune applicazioni lineari di dominio $\mathbb{K}^5$. Si vede facilmente che $\mathrm{rg}(A) = 2$ e $\mathrm{rg}(B) = 2$. Pertanto, $\dim(U) = \dim(W) = 5 - 2 = 3$.

Abbiamo visto al punto **c)** che, per poter trovare una base di U (e di W), visto come nucleo dell'omomorfismo L_A (ed L_B), è più conveniente ancora la riduzione a scala. La matrice A è già a scala. Pertanto, risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = -x_3\,, \\ x_2 = -x_3 + x_5\,, \end{cases}$$

otteniamo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Allora l'insieme

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base per U. Notando che anche la matrice B è già a scala, in modo analogo a quanto appena fatto, si verifica che una base per W è

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ora consideriamo $U+W$. Un sistema di generatori per $U+W$ è dato da $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$, ovvero

$$U + W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Vediamo ora di estrarne una base per $U+W$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue che $\dim(U+W) = 4$ e in effetti $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base per $U+W$.

Facciamo alcune osservazioni.

(a) nelle basi di U e di W erano presenti due vettori in comune[1], per cui non occorreva scriverli due volte considerando $U+W$;

(b) nel disporre i vettori in matrice conviene ordinarli opportunamente, in modo da avere il più possibile zeri in basso a sinistra;

(c) nell'ultimo passaggio della riduzione a scala abbiamo eliminato l'ultima riga perchè uguale alla terzultima (la sua presenza non fa aumentare il rango e quindi neppure i pivot).

Ci chiediamo infine se la somma $U+W$ sia diretta. Ciò non è vero. Infatti, dalla formula di Grassmann ricaviamo

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) + \dim(U \cap W).$$

[1]Quindi possediamo anche una base per $U \cap W$.

Sosotituendo i valori corrispondenti, otteniamo $3 + 3 = 4 + \dim(U \cap W)$, ovvero

$$\dim(U \cap W) = 2 \neq 0\,.$$

Segue che $U \cap W \neq \emptyset$ pertanto la somma di U con W non può essere diretta. ♣

Esercizi

1. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 3x_1 + x_2 + \lambda x_2^2 + x_3, 5x_1 + x_2 + 2x_3)\,.$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui T_λ sia lineare. Descrivere successivamente $\mathrm{Ker}(T_\lambda)$ e $\mathrm{Im}(T_\lambda)$.

2. In ciascuno dei tre casi seguenti considera se sia possibile costruire applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate, e in caso ne esistano più di una se ne determinino due distinte:

(i) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \rangle$;

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \langle (1,1) \rangle$;

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(h) = \langle 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, -\boldsymbol{e}_1 \rangle$.

3. Determinare una matrice $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ tale che

$$L_A(\boldsymbol{e}_1) = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\,, \qquad L_A(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 - 7\boldsymbol{e}_3\,,$$

$$L_A(\boldsymbol{e}_3) = 4\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 11\boldsymbol{e}_3\,.$$

e si determinin $\mathrm{Ker}(L_A)$ e $\mathrm{Im}(L_A)$.

8 Rappresentazione dei sottospazi

Sia W_h un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$, con $h = \dim W_h$. Fissiamo una base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ per $V_n(\mathbb{K})$. Per ogni $\boldsymbol{w} \in W_h$, sia

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

il vettore delle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$, ossia $\boldsymbol{x} = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{w})$.

Forma parametrica

Si consideri una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_h\}$ di W_h, con $\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{w}_j) =: \boldsymbol{a}_j$ e

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, h\,.$$

Allora l'equazione vettoriale di W_h diviene:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_h \boldsymbol{a}_h\,, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathbb{K}\,,$$

ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_h a_{1h}\,, \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \\ x_n & = & \lambda_1 a_{n1} + \ldots + \lambda_h a_{nh}\,, \end{array} \right. \qquad \text{(equazioni parametriche di } W_h\text{)}.$$

Ponendo ora $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{n,h}(\mathbb{K})$ e

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_h \end{bmatrix},$$

possiamo scrivere

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\lambda}\,,$$

dove $\boldsymbol{\lambda}$ è un vettore variabile in $\mathbb{K}^h$. Dunque quest'ultima rappresentazione fornisce il sottospazio W_h come immagine di $\mathbb{K}^h$ attraverso un opportuno omomorfismo; più precisamente, $W_h = \mathrm{Im}(T)$, essendo $T : \mathbb{K}^h \to V$ il monomorfismo rappresentato dalla matrice A rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^h$ e alla $\mathcal{B}$ di V.

Forma cartesiana

Osserviamo che qualsiasi sottospazio W_h di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ può essere considerato come *nucleo di un opportuno omomorfismo* T avente come dominio V (per esempio, se si sostituisce la base $\mathcal{B}$ di $V(\mathbb{K})$ con una base $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_{n-h}})$, ottenuta completando una base $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_h)$ di W_h, si può definire l'endomorfismo $T_W : V \to V$ tale che $T(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}$ per $i = 1, \ldots, h$ e $T(\boldsymbol{e}_{j_r}) = \boldsymbol{e}_{j_r}$ per $r = 1, \ldots, n-r$; risulta immediatamente che $\mathrm{Ker}(T_W) = W_h$). Allora, se A è la matrice della rappresentazione scalare di T rispeto alla base $\mathcal{B}$, W_h risulta essere l'insieme di tutti e soli i vettori le cui coordinate $\boldsymbol{x}$ rispetto a $\mathcal{B}$ soddisfano l'equazione $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, con $\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = n - h$, ovvero sono soluzione di un sistema lineare omogeneo di $n - h$ equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0\,, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\,, \\ \qquad\vdots \\ a_{(n-h)1}x_1 + \ldots + a_{(n-h)n}x_n = 0\,, \end{cases} \qquad \text{(equazioni cartesiane di } W_h\text{)},$$

ottenuto da $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ considerando solo un numero di equazioni linearmente indipendenti pari al rango.

Come si passa dalla forma parametrica alla forma cartesiana e, viceversa, dalla rappresentazione cartesiana a quella parametrica della rappresentazione di un dato sottospazio vettoriale W_h di $V(\mathbb{K})$?

Dalle equazioni parametriche alle equazioni cartesiane

Sia $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_h\boldsymbol{a}_h \in W_h$. Si ricavano i parametri λ_i $(i = 1, \ldots, h)$ risolvendo rispetto a $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, considerati come incognite, h delle n equazioni parametriche, e precisamente quelle che corrispondono ad un minore che dà il rango della matrice $A = [a_{i,j}]$ (esplicitando $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ in funzione di $x_1, \ldots, x_h$); successivamente si sotituiscono le espressioni ottenute nelle rimanenti $n - h$ equazioni che forniranno così un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio vettoriale W_h:

$$C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\,, \qquad \text{con } C \in \mathrm{Mat}_{n,r}(\mathbb{K}) \text{ e } \mathrm{rg}(C) = n - r.$$

Questo procedimento appena descritto viene chiamato *eliminazione dei parametri.*

(3.8.1) Esempio *Si considerino le equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 3u + 2v\,, \\ y = u - v\,, \\ z = u + v\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ricavando $u = u(x, y)$ *e* $v = v(x, y)$*, otteniamo*

$$\begin{cases} x = 3u + 2v\,, \\ y = u - v\,, \\ z = u + v\,, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3u + 2v = x\,, \\ u - v = y\,, \\ u + v = z\,, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u - v = y\,, \\ 5v = x - 3y\,, \\ 2v = z - y\,, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u - v = y\,, \\ 5v = x - 3y\,, \\ 0 = 2x - y - 5z\,, \end{cases}$$

pertanto le equazioni cartesiane associate sono $2x - y - 5z = 0$*.*

Dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche

Consideriamo il sistema lineare omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Per ottenere le equazioni parametriche è sufficiente risolvere tale sistema. La soluzione $\boldsymbol{x}$ dipenderà da h parametri, essendo $h = \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = n - \mathrm{rg}(A)$. Pertanto

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_h \boldsymbol{a}_h\,.$$

Questo procedimento non è altro che la risoluzione di un sistema lineare omogeneo.

(3.8.2) Esempio *Sia dato il sottospazio vettoriale* W_h *di* $\mathbb{K}^4$ *di equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} x - y - 2z + t = 0\,, \\ x + z - 2t = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, esplicitando, ad esempio, x *e* y *in funzione di* z *e* t*, otteniamo:*

$$\begin{cases} x - y - 2z + t = 0\,, \\ x + z - 2t = 0\,, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z + 2t\,, \\ y = -3z + 3t\,, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t\,,$$

ovvero

$$\begin{cases} x = -\lambda + 2\mu\,, \\ y = -3\lambda + 3\mu\,, \\ z = \lambda\,, \\ t = \mu\,. \end{cases}$$

Capitolo 4

Autovettori e autovalori; diagonalizzabilità

1 Autovettori, autovalori e autospazi

(4.1.1) Definizione *Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Poniamo*

$$\mathrm{End}(V) := \{T : V \to V : T \text{ è un endomorfismo}\} .$$

(4.1.2) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V^*$ e $T \in \mathrm{End}(V)$. Diciamo che $\boldsymbol{v}$ è un* **autovettore di** *T se esiste un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Chiamiamo* **autovalore** *di T relativo all'autovettore $\boldsymbol{v}$ lo scalare λ (che è unico).*

(4.1.3) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di T. Poniamo*

$$V_\lambda := \{\boldsymbol{v} \in V^* : T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}\} \cup \{\boldsymbol{0}\} .$$

*Chiamiamo V_λ l'***autospazio** *relativo all'autovalore λ.*

(4.1.4) Proposizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di T. Allora V_λ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Per definizione, $\boldsymbol{0} \in V_\lambda$, quindi $V_\lambda \neq \emptyset$. Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_\lambda$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sfruttando la linearità di T e ricordando che $T(\boldsymbol{v}_1) = \lambda\boldsymbol{v}_1$ e $T(\boldsymbol{v}_2) = \lambda\boldsymbol{v}_2$ abbiamo:

$$T(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) = \alpha T(\boldsymbol{v}_1) + \beta T(\boldsymbol{v}_2) = \alpha(\lambda\boldsymbol{v}_1) + \beta(\lambda\boldsymbol{v}_2) = \lambda(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2) ,$$

ovvero $\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 \in V_\lambda$. ■

(4.1.5) Definizione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di T. Chiamiamo* **molteplicità geometrica dell'autovalore** λ *lo scalare $g_\lambda := \dim(V_\lambda)$.*

(4.1.6) Osservazione *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di T. Ciò significa che esiste almeno un autovettore $\boldsymbol{v} \in V^*$ rispetto a cui λ è autovalore. Allora $\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ e $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, quindi $\dim V_\lambda \geq 1$. Possiamo allora affermare che ad ogni autovalore λ di un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V)$ corrisponde un sottospazio almeno unidimensionale di autovettori. Viceversa, ad ogni autovettore $\boldsymbol{v}$ corrisponde uno ed un solo autovalore. Ciò implica che due autospazi V_λ e V_μ relativi ad autovalori distinti λ e μ sono disgiunti, ovvero $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$.*

Di più, si può facilmente provare (Esercizio!) che autovettori corrispondenti ad autovalori tutti distinti sono linearmente indipendenti. Resta così dimostrato il seguente

(4.1.7) Teorema *Siano $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ h autovalori distinti di T, con $h \geq 2$. Allora la somma dei relativi autospazi è diretta, ovvero $\bigoplus_{j=1}^{h} V_{\lambda_j} \leq V$.*

2 Polinomio caratteristico

(4.2.1) Definizione *Sia $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Chiamiamo* polinomio caratteristico della matrice A *il polinomio $p_A(\lambda)$ di grado n nell'indeterminata λ a coefficienti in $\mathbb{K}$ definito da*

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Richiamiamo alcune nozioni fondamentali sui polinomi e le loro radici.

(4.2.2) Definizione *Siano* $p(x)$ *un polinomio di grado* n *a coefficienti in* $\mathbb{K}$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Diciamo che* α *è una* **radice** *di* $p(x)$ *se* $p(\alpha) = 0$.

Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente

(4.2.3) Teorema (di Ruffini) *Siano* $p(x)$ *un polinomio di grado* n *a coefficienti in* $\mathbb{K}$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Allora sono fatti equivalenti:*

(a) α *è radice di* $p(x)$;

(b) $p(x)$ *è divisibile per* $(x-\alpha)$, *ovvero esiste un polinomio* $g(x)$ *tale che* $p(x) = g(x)(x-\alpha)$.

(4.2.4) Definizione *Siano* $p(x)$ *un polinomio di grado* n *a coefficienti in* $\mathbb{K}$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$ *una radice di* $p(x)$. *Diciamo che* $h \in \mathbb{N}$ *è la* **molteplicità algebrica** *di* α *se* $p(x)$ *è divisibile per* $(x-\alpha)^h$ *ma* $p(x)$ *non è divisibile per* $(x-\alpha)^{h+1}$.

In generale, dato un polinomio $p(x) = \sum_{h=0}^{n} a_h x^h$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, può capitare che alcune sue radici non siano in $\mathbb{K}$ (come ad esempio per il polinomio $p(x) = x^3 + x \in \mathbb{R}[x]$) oppure che nessuna radice sia in $\mathbb{K}$ (come per il polinomio $q(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$). Una conseguenza del Teorema di Ruffini è che il numero r delle radici in $\mathbb{K}$ di un polinomio di grado n è tale che $r \leq n$.

(4.2.5) Definizione *Diciamo che un campo* $\mathbb{K}$ *è* **algebricamente chiuso** *se ogni polinomio* $p(x)$ *a coefficienti in* $\mathbb{K}$ *e di grado* n *ammette tutte le sue* n *radici in* $\mathbb{K}$.

(4.2.6) Teorema (fondamentale dell'algebra) *Il campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi è algebricamente chiuso.*

Pertanto, se si considera un polinomio $p(x) = \sum_{h=0}^{n} a_h x^h \in \mathbb{C}[x]$ risulta che

$$p(x) = a_n (x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_t)^{n_t}, \quad \text{con } n_1 + \ldots + n_t = n.$$

Torniamo ora al polinomio caratteristico di una matrice e consideriamo un semplice esempio:

(4.2.7) Esercizio *Sia $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ la matrice definita da*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Determinare il polinomio caratteristico di A.

Soluzione. Risulta

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 6 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 6 = (3-\lambda)(\lambda^2+2) .$$

Pertanto il polinomio $p_A(\lambda)$ possiede solo una radice reale ($\lambda_1 = 3$) e due radici complesse coniugate ($\lambda_2 = i\sqrt{2}$ e $\lambda_3 = -i\sqrt{2}$), tutte di molteplicità algebrica 1. ♣

Scopriamo ora che gli autovalori di un omomorfismo sono strettamente correlati con il polinomio caratteristico della matrice che rappresenta l'omomorfismo stesso rispetto ad una qualsiasi base:

(4.2.8) Teorema *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V_n)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) λ è un autovalore di T;

(b) detta $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ la matrice che rappresenta T rispetto ad una base qualsiasi di $V_n(\mathbb{K})$, risulta che λ è radice del polinomio caratteristico p_A di A.

Dimostrazione.
(a) $\Longrightarrow$ *(b)* Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base di $V_n(\mathbb{K})$. Rappresentando scalarmente l'endomorfismo T otteniamo

$$\widetilde{T}_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} . \end{cases}$$

Per ipotesi, esiste $\boldsymbol{v} \in V_n^*(\mathbb{K})$ tale che $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. Poniamo

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Allora la relazione $T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ diviene $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, cioè $A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, da cui $(A - \lambda I_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Segue che $\boldsymbol{x}$ è autosoluzione del sistema lineare omogeneo quadrato $(A - \lambda I_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. La condizione perchè questo sistema ammetta autosoluzioni è che $\det(A - \lambda I_n) = 0$, cioè $p_A(\lambda) = 0$, ovvero λ deve essere radice del polinomio caratteristico di A.
$(b) \implies (a)$ Supponiamo ora che $p_A(\lambda) = 0$. Segue che $\det(A - \lambda I_n) = 0$ e quindi il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ammette autosoluzioni. Sia

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

una di queste autosoluzioni. Allora $(A - \lambda I_n)\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, da cui $A\overline{\boldsymbol{x}} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}$. Pertanto λ è un autovalore di T. ■

Abbiamo visto con il teorema precedente come si possano caratterizzare, e quindi determinare, gli autovalori di un endomorfismo; tale caratterizzazione, però, è legata a una matrice che rappresenta l'endomorfismo, per cui parrebbe dipendere dalla scelta della base $\mathcal{B}$ rispetto a cui rappresentiamo scalarmente l'endomorfismo.

Apriamo allora una parentesi per esaminare come varia la rappresentazione scalare di un endomorfismo (anzi, più in generale, di un omomorfismo tra spazi) quando si effettua un cambiamento di base. In tal modo saremo anche in grado di stabilire se e come varia il polinomio caratteristico (e con esso le sue radici, cioè gli autovalori dell'endomorfismo), al variare della base.
Data la base di partenza $\mathcal{B}$, sia ora $\mathcal{B}'$ una nuova base di $V_n(\mathbb{K})$. Ricordiamo che le componenti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ di un generico vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ ed alla base $\mathcal{B}'$ sono legate dalla relazione (cfr. pagina 50)

$$\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{x}'$$

essendo $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ $(\det(M) \neq 0)$ la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, ossia M è la matrice che ha sulle colonne le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ dei vettori della base $\mathcal{B}'$.
Sia ora $T \in \mathrm{End}(V_n)$ e sia $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ la matrice che rappresenta T rispetto alla

base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

Sia $A' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ la matrice che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B}'$:

$$\boldsymbol{y}' = A'\boldsymbol{x}'.$$

Abbiamo allora

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = A(M\boldsymbol{x}') = (AM)\boldsymbol{x}' \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y}' = M^{-1}\boldsymbol{y}\,,$$

quindi:

$$A'\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}' = (M^{-1}AM)\boldsymbol{x}'\,,$$

pertanto:

$$A' = M^{-1}AM\,.$$

(4.2.9) Definizione *Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Diciamo che A e B sono* **simili** *se esiste una matrice $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ invertibile tale che $B = M^{-1}AM$.*

E' immediato verificare che *la relazione di similitudine fra matrici di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ è una relazione di equivalenza.*

Pertanto, matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo in basi diverse sono simili, e la seguente proposizione afferma che esse hanno lo stesso polinomio caratteristico:

(4.2.10) Proposizione *Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Se A e B sono simili allora esse possiedono lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ tale che $\det(C) \neq 0$ e $B = C^{-1}AC$. Allora, ricordando il Teorema di Binet, otteniamo:

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}I_nC) =$$

$$= \det(C^{-1}(AC - \lambda I_nC)) = \det(C^{-1}(A - \lambda I_n)C) = \det(C^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(C)\,.$$

Dal fatto che $\det(C^{-1}) = (\det(C))^{-1}$, si ha

$$p_B(\lambda) = \frac{1}{\det(C)}\det(A - \lambda I_n)\det(C) = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)\,,$$

da cui la tesi. ■

Possiamo allora concludere che il polinomio caratteristico, e quindi gli autovalori (che sono le sue radici) sono *invarianti rispetto alla similitudine di matrici*, sono cioè proprietà comuni di ciascuna classe di similitudine di matrici di $Mat_n(\mathbb{K})$. Se poi si considera un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V_n)$, a seconda della base fissata in $V_n(\mathbb{K})$ esso sarà rappresentato da diverse matrici di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, le quali però appartengono tutte ad uninica classe di similitudine, ed hanno quindi tutte lo stesso polinomio caratteristico, il quale ha per radici esattamente gli autovalori dell'endomorfismo T, e che potrà pertanto dirsi il **polinomio caratteristico dell'endomorfismo** T.

(4.2.11) Definizione *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V_n)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di T. Chiamiamo* **molteplicità algebrica** a_λ **di** λ *la sua molteplicità algebrica come radice del polinomio caratteristico di T.*

Ricordiamo che ad un autovalore λ di $T \in \mathrm{End}(V_n)$ avevamo associato anche la molteplicità geometrica g_λ che era la dimensione dell'autospazio V_λ ad esso relativo. Che legami ci sono tra le due molteplicità?
Vale il seguente

(4.2.12) Teorema *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V_n)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di T. Allora $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$.*

(4.2.13) Esercizio *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinare autovalori, autospazi e relative molteplicità geometriche ed algebriche.

Soluzione. Iniziamo con il ricavare gli autovalori di T. A questo scopo, troviamo le radici di p_A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)\,.$$

Pertanto T possiede due autovalori distinti. Essi sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Inoltre, dall'analisi di $p_A(\lambda)$, deduciamo che $a_{\lambda_1} = a_3 = 1$ e $a_{\lambda_2} = a_2 = 2$.
Determiniamo ora gli autospazi.

$$V_{\lambda_1} = V_3 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, T(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x} \right\}\,.$$

Pertanto l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 3$ è costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - 3I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con $\mathrm{rg}(A - 3I_3) = 2$, ovvero V_3 è il nucleo dell'andomorfismo L_{A-3I_3}. Pertanto:

$$\dim(\mathrm{Ker}(L_{A-3I_3})) = 3 - \mathrm{rg}(A - 3I_3) = 3 - 2 = 1\,.$$

Deduciamo quindi che $g_{\lambda_1} = g_3 = 1$. Risolvendo direttamente il sistema omogeneo $(A - 3I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ troviamo:

$$\begin{cases} -x + y = 0\,, \\ -y = 0\,, \end{cases}$$

da cui $x = y = 0$ e quindi le soluzioni sono della forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Segue che

$$V_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \in \mathbb{R} \right\}\,,$$

e si vede immediatamente che $g_3 = 1$. In questo caso $a_3 = g_3 = 1$.
Per la determinazione di $V_{\lambda_2} = V_2$ abbiamo

$$V_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, T(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \right\} = \mathrm{Ker}(L_{A-2I_3})\,.$$

Si può verificare facilmente che $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$, quindi $\dim(\mathrm{Ker}(L_{A-2I_3})) = 3 - 2 = 1$ da cui $\dim(V_2) = g_2 = 1$. Trovando in modo esplicito le soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, otteniamo

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in \mathbb{R} \right\}\,,$$

da cui $g_2 = 1$. In questo caso, però, $g_2 = 1 < 2 = a_2$. ♣

Esercizi

1. Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})\,.$$

Determinare gli autovalori e le equazioni cartesiane dei corrispondenti autospazi.

2. Determinare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})\,.$$

3. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice identica I_n di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ e della matrice nulla di ordine n.

4. Sia $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di A. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca ricorsivamente A^n ponendo $A^0 = I_n$ e $A^n = AA^{n-1}$ Si dimostri che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, λ^k è un autovalore di A^k.

5. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ due matrici quadrate e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ due autovalori rispettivamente di A e B. Si dica se $\lambda\mu$ è un autovalore di AB.

6. Si ponga

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) : \det(X) \in \mathbb{K}^*\}\ ,$$

e sia $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si consideri la seguente applicazione:

$$\psi_M : \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & M^{-1}AM\,. \end{cases}$$

Si dica se ψ_M è un isomorfismo.

7. Sia $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'endomorfismo $T(p(x)) = (x+1)p''(x^2)$, dove $p''(x^2)$ è la derivata seconda del polinomio $p(x)$ valutata in x^2. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di T.

8. Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $S, T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$. Si dimostri che l'insieme degli autovalori di $S \circ T$ coincide con l'insieme degli autovalori di $T \circ S$.

3 Diagonalizzazione

(4.3.1) Definizione *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $T \in \mathrm{End}(V_n)$. Diciamo che T* **è diagonalizzabile** *se esiste una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ rispetto alla quale la matrice della rappresentazione scalare di T è diagonale.*

(4.3.2) Definizione *Sia $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Diciamo che A* **è diagonalizzabile** *se A è simile ad una matrice diagonale, ovvero se esiste una matrice $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, con $\det(M) \neq 0$, tale che*

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}.$$

Poichè abbiamo dimostrato che matrici rappresentative di uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono simili, le due definizioni precedenti sono strettamente legate.

Infatti, se $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$ ed A è la matrice di T rispetto ad una base $\mathcal{B}$, risulta che T è diagonalizzabile se, e solo se, esiste una base $\mathcal{B}'$ di $V_n(\mathbb{K})$ rispetto a cui T è rappresentato da una matrice diagonale $D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Ciò equivale a dire che $D = M^{-1}AM$, essendo M la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$: ma questo significa proprio che la matrice A è diagonalizzabile.

Possiamo dunque concludere che *un endomorfismo* $T \in \text{End}(V_n(\mathbb{K}))$ *è diagonalizzabile se, e solo se, la matrice* $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ *che rappresenta* T *rispetto ad una base qualsiasi di* $V_n(\mathbb{K})$ *è diagonalizzabile* se, e solo se, $L_A \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ è diagonalizzabile.

Stabiliamo ora condizioni necessarie e sufficienti affinchè un endomorfismo sia diagonalizzabile, enunciando e dimostrando i tre seguenti *criteri di diagonalizzabilità.*

(4.3.3) Teorema (I criterio di diagonalizzabilità) *Siano* $V_n(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale e* $T \in \text{End}(V_n(\mathbb{K}))$*. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) T *è diagonalizzabile;*

(b) $V_n(\mathbb{K})$ *ammette una base formata da autovettori di* T*.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Per ipotesi, esiste una base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ tale che

$$\widetilde{T}_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & D\boldsymbol{x}\,, \end{cases} \qquad \text{con} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}.$$

Segue che $T(\boldsymbol{e}_1) = d_1\boldsymbol{e}_1$, quindi $\boldsymbol{e}_1$ è un autovettore di T. Infatti:

$$\widetilde{T}_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = D\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ragionando in modo analogo, si vede che per ogni $j = 1, \ldots, n$ $\boldsymbol{e}_j$ è autovettore per T. Pertanto $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ è una base per $V_n(\mathbb{K})$ costituita da autovettori per T.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Sia $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ una base per $V_n(\mathbb{K})$ formata da autovettori per T. Esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $T(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$ per $i = 1, \ldots, n$. Sia A la matrice di T rispetto a tale base $\mathcal{B}$. La prima colonna di A è formata dalle componenti di $T(\boldsymbol{v}_1)$ rispetto a $\mathcal{B}$:

$$T(\boldsymbol{v}_1) = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{v}_n\,.$$

In modo analogo, la seconda colonna di A è formata dalle componenti di $T(\boldsymbol{v}_2)$ rispetto a $\mathcal{B}$:

$$T(\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 = 0\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 + \ldots + 0\boldsymbol{v}_n .$$

Procedendo in questo modo si giunge alla n-esima colonna di A che è formata dalle componenti di $T(\boldsymbol{v}_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$, ovvero

$$T(\boldsymbol{v}_n) = \lambda_n \boldsymbol{v}_n = 0\boldsymbol{v}_1 + \ldots + 0\boldsymbol{v}_{n-1} + \lambda_n \boldsymbol{v}_n .$$

Da quanto osservato, deduciamo che

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

ossia A è diagonale. ■

(4.3.4) Teorema (II criterio di diagonalizzabilità) *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) T è diagonalizzabile;

(b) $V_n(\mathbb{K})$ è somma diretta degli autospazi relativi agli autovalori di T.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Siano $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_h}$ gli autospazi di T relativi ad autovalori distinti. Dal Teorema (4.1.7) risulta che $\bigoplus_{i=1}^{h} V_{\lambda_i} \leq V_n(\mathbb{K})$. Per il I criterio di diagonalizzabilità, esiste una base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$ formata da autovettori di T. Dal fatto che gli autovettori appartengono agli autospazi di T, segue che $\mathcal{B} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{h} V_{\lambda_i}$, quindi

$$V_n(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{B} \rangle \leq \bigoplus_{i=1}^{h} V_{\lambda_i} \leq V_n(\mathbb{K}) ,$$

dunque $V_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{h} V_{\lambda_i}$.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Supponiamo ora che $V_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{h} V_{\lambda_i}$, essendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ gli autovalori

distinti di T. Per ogni $i = 1, \ldots, h$ sia $\mathcal{B}_i$ una base di V_{λ_i}. Poniamo

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{h} \mathcal{B}_i \,.$$

Allora $\mathcal{B}$ è una base di $\bigoplus_{i=1}^{h} V_{\lambda_i} = V_n(\mathbb{K})$. Pertanto, $\mathcal{B}$ è una base di $V_n(\mathbb{K})$ formata da autovettori di T. Per il I criterio di diagonalizzabilità, deduciamo che T è diagonalizzabile. ■

(4.3.5) Corollario *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$. Supponiamo che T possieda n autovalori distinti. Allora T è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori distinti di T, si ha $a_{\lambda_i} = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Dal Teorema (4.2.12) sappiamo che $1 \leq g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i} = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, quindi

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}\right) = \dim(V_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(V_{\lambda_n}) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = n = \dim(V_n(\mathbb{K}))\,,$$

pertanto $V_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$. Per il II criterio di diagonalizzabilità deduciamo che T è diagonalizzabile. ■

(4.3.6) Osservazione *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$. L'endomorfismo T può essere diagonalizzabile anche se alcuni autovalori (che saranno quindi in numero di $h \leq n$) hanno molteplicità algebrica maggiore di uno. Si deve comunque controllare la loro molteplicità geometrica: affinchè T sia diagonalizzabile, è necessario (e sufficiente) che*

$$\sum_{i=1}^{h} g_{\lambda_i} = n \tag{4.3.7}$$

grazie al II criterio di diagonalizzabilità.

(4.3.8) Esercizio *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verificare se T è diagonalizzabile.

Soluzione. Abbiamo già osservato nell'Esercizio (4.2.13) che gli autospazi associati a T sono

$$V_2 = \left\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\}, \quad \dim(V_2) = 1,$$

$$V_3 = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\right\}, \quad \dim(V_3) = 1,$$

quindi $V_2 \oplus V_3$ ha dimensione 2 e non coincide con $\mathbb{R}^3$, quindi T non è diagonalizzabile. ♣

(4.3.9) Teorema (III criterio di diagonalizzabilità) *Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *T è diagonalizzabile;*

(b) *il polinomio caratteristico di T è interamente decomponibile in $\mathbb{K}$ in fattori lineari e per ogni autovalore λ_i di T risulta $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.*

(4.3.10) Osservazione *L'affermazione* (b) *del Teorema* (4.3.9) *è equivalente alla condizione* (4.3.7).

Pertanto, dato un endomorfismo $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$, come si procede alla sua (eventuale) diagonalizzazione? Anzitutto si scrive la matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ che rappresenta T rispetto ad una base opportuna. Si individua $p_A(\lambda)$ e quindi si cercano le radici, ossia gli autovalori di T. Si possono quindi verificare due casi:
1. gli autovalori non sono tutti in $\mathbb{K}$ (cioè $p_A(\lambda)$ non è completamente decomponibile in $\mathbb{K}$). Per il III criterio di diagonalizzabilità T non è diagonalizzabile;
2. gli autovalori sono tutti in $\mathbb{K}$ (cioè $p_A(\lambda)$ è completamente decomponibile in $\mathbb{K}$, ossia si spezza in fattori lineari a coefficienti in $\mathbb{K}$). Si calcolano quindi le dimensioni degli autospazi. Abbiamo qundi due sottocasi:

2.a la somma delle molteplicità geometriche è n. Allora T è diagonalizzabile. In questo caso A è simile ad una matrice D diagonale;

2.b la somma delle molteplicità geometriche è inferiore a n. Allora T non è diagonalizzabile.

(4.3.11) Osservazione *Si noti che se T è un endomorfismo diagonalizzabile di $V_n(\mathbb{K})$, allora le sue rappresentazioni scalari diagonali sono esattamente quelle relative a basi di autovettori di T, dunque la diagonalizzazione di un endomorfismo (o, equivalentemente, di una matrice) comporta in genere un cambiamento di coordinate: una matrice M che 'diagonalizza' A è proprio una matrice di cambiamento di base, che detremina il passaggio da una base iniziale qialsiasi ad una base di autovettori.*
Si noti che se un endomorfismo è diagonalizzabile, le sue rappresentazioni diagonali differiscono per le possibili permutazioni degli autovalori, e che per ogni rappresentazione diagonale si possono trovare diverse matrici diagonalizzanti, a seconda della base di autovettori che si fissa in ciascun autospazio.

(4.3.12) Esercizio *Si dica se è possibile diagonalizzare il seguente endomorfismo:*

$$L_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x}\,, \end{cases}$$

essendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})\,.$$

In caso affermativo, determinare una base formata da autovettori di L_A.

Soluzione. Cominciamo con il cercare gli autovalori di L_A per mezzo del polinomio caratteristico della matrice A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda(\lambda-3)+2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)\,.$$

Le radici di $p_A(\lambda)$ sono date da $\lambda_1 = 1$ con $a_{\lambda_1} = a_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$ con $a_{\lambda_2} = a_2 = 1$. Vediamo ora le dimensioni degli autospazi associati. $V_1 = \mathrm{Ker}(L_{A-I_3})$ e si verifica facilmente che $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$. Segue che $g_1 = \dim(V_1) = 3 - 1 = 2$ e notiamo che $a_1 = g_1$. Osservando ora che $a_2 = 1$ e $1 \leq g_2 \leq a_2 = 1$, deve essere $a_2 = g_2 = 1$. Allora, per il III criterio di diagonalizzabilità, l'endomorfismo L_A è diagonalizzabile e la sua rappresentazione diagonale è data da

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a meno di una permutazione degli elementi della diagonale.
La diagonalizzazione è pertanto conclusa. Si noti che fino ad ora non è stato necessario determinare esplicitamente gli autospazi. Ora però ci occorrono, in quanto vogliamo trovare una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$, cioè una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale la rappresentazione scalare dell'endomorfismo L_A sia proprio $\boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{x}'$ (dove $\boldsymbol{x}'$ e $\boldsymbol{y}'$ sono le componenti di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ rispetto a tale base, con $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$). Con semplici calcoli, si verifica che

$$V_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, y = -2z\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

In modo analogo determiniamo V_2. Risulta che $V_2 = \mathrm{Ker}(L_{A-2I_3})$.

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto $\mathrm{rg}(A-2I_3) = 2$. Per la determinazione di V_2 dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, ottenendo:

$$\begin{cases} x = -2z \,, \\ y = -z \,. \end{cases}$$

Pertanto deduciamo che

$$V_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = -2z, \, y = -z\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Allora

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle ,$$

e la base cercata è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

La matrice del cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolando l'inversa della matrice M si ottiene:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice M è proprio quella che 'diagonalizza' A nel senso che

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D\,,$$

e l'esercizio è concluso. ♣

(4.3.13) Esercizio *Sia $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$ la matrice definita da*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si dica se A è diagonalizzabile in $\mathbb{K}$ distinguendo i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soluzione. Iniziamo con il considerare il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dal calcolo del polinomio caratteristico, otteniamo $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Tale polinomio non si decompone in $\mathbb{R}[x]$, pertanto, per il III criterio di diagonalizzabilità, dobbiamo concludere che A non è diagonalizzabile.

Vediamo cosa accade se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Risulta $p_A(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)$, pertanto A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. Troviamo quindi una base di autovettori. Per determinare V_i dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo $(A - iI_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ottenendo

$$V_i = \left\{(k, ki) \in \mathbb{C}^2 : \, k \in \mathbb{C}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle.$$

In modo analogo, otteniamo

$$V_{-i} = \left\{(k, -ik \in \mathbb{C}^2 : \, k \in \mathbb{C}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Pertanto, una base di autovettori è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

La matrice del cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{C}^2$ alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\,.$$

e un calcolo esplicito di $M^{-1}AM$, porta alla matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

♣

Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca se f è diagonalizzabile.

2. Si dica se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo la si diagonalizzi.

3. Siano $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ una base di $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che $T(1,1) = (3,-1)$ e $T(1,-1) = (9,-3)$. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di T. Si dica inoltre se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una base rispetto a cui la matrice associata a T sia diagonale.

4. Si determinino per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$$

è tale che l'endomorfismo $L_{A_t} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ sia diagonalizzabile e per tali valori di t si esibisca una base di autovettori ed una matrice che diagonalizza A_t.

5. Sia $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 = x_3\}$. Si trovi $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ che soddisfi le seguenti proprietà:

(i) V è un autospazio di T;

(ii) T non è diagonalizzabile;

(iii) $T(1,1,1) = (1,-2,0)$.

6. Sia $V_4(\mathbb{C})$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4\}$ una base di $V_4(\mathbb{C})$. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si consideri l'endomorfismo $T_k : V_4 \to V_4$ tale che $T_k(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_2$, $T_k(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_3$, $T_k(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_4$ e $T_k(\boldsymbol{u}_4) = \boldsymbol{u}_1$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{C}$ per i quali T_k risulta essere diagonalizzabile. Per tali valori di k si individui una base che diagonalizzi T_k.

7. Sia $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'unico endomorfismo tale che $T(x^3) = x^2+x$, $T(x^2) = x^3+1$, $T(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$ e $T(1) = x^3 - x^2 - x + 1$. Si individuino gli autovalori ed autovettori di T e si dimostri che T è diagonalizzabile. Si verifichi inoltre che $T \circ T = T$. Si calcolino inoltre le dimensioni dei sottospazi $U = \mathrm{Im}(T)$ e $W = \mathrm{Im}(T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[x]})$ e si dimostri che $U = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[x]})$ e $W = \mathrm{Ker}(T)$. Dedurre che $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$.

8. Sia $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'endomorfismo dato da $T(p(x)) = p(x+1)$. Si scriva la matrice che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2 - \frac{2}{3}\right\}$. Si trovino gli autovalori e gli autospazi di T e si dimostri che T non è diagonalizzabile.

9. Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $S, T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$, $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di S e V_λ il relativo autospazio. Si supponga che $S \circ T = T \circ S$. Si dimostri che $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

10. Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale, $T \in \mathrm{End}(V_n(\mathbb{K}))$ e $\boldsymbol{v}_0 \in V_n^*(\mathbb{K})$ un autovettore di T corrispondente ad un autovalore non nullo. Si dimostri che $\boldsymbol{v}_0 \in \mathrm{Im}(T)$. Dedurre inoltre che se T è diagonalizzabile, allora $V_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$.

Indice analitico